TRANSIRE SVVM PECTVS MVNDOQVE POTIRI
Andrey Nikolaevich Kolmogorov was a Soviet mathematician who made significant contributions to the mathematics of probability theory, topology, intuitionistic logic, turbulence, classical mechanics, algorithmic information theory and computational complexity.
Bertrand Arthur William Russell, 3rd Earl Russell, OM FRS was a British philosopher, logician, mathematician, historian, writer, essayist, social critic, political activist, and Nobel laureate.
Sir Ronald Aylmer Fisher FRS was a British statistician and geneticist. For his work in statistics, he has been described as "a genius who almost single-handedly created the foundations for modern statistical science" and "the single most important figure in 20th century statistics".
David Bryant Mumford is an American mathematician known for distinguished work in algebraic geometry, and then for research into vision and pattern theory. He won the Fields Medal and was a MacArthur Fellow. In 2010 he was awarded the National Medal of Science.
آمار و احتمال
STATISTICS&PROBABILITY
جزوه طلایی

درس اول آشنایی با منطق ریاضی

ص ۲۶ تا ۳۸ کتاب آمار و ...

۱ منطق ریاضی و گزاره

منطق ریاضی که به آن منطق نمادین نیز گفته می‌شود، دستور زبان ریاضی یا مطالعه در ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شود. این شاخه از ریاضی به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند.

هر جملهٔ خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا ارزش نادرست باشد را گزاره می‌نامند.

- مجموع هر دو عدد فرد، همواره عددی زوج است.
- عدد $۲^{۱۰۱}-۱$ عددی اول است.

جملات امری، پرسشی، عاطفی، احساسی، تعجبی و دعایی گزاره محسوب نمی‌شوند.

- کتاب‌ها را روی میز بگذارید. [امری]
- آیا ۹۹۷ عددی اول است؟ [پرسشی]
- بیا و کشتی ما در شط شراب انداز. [احساسی]
- چه هوای دل‌انگیزی! [تعجبی]
- ای کاش نرفته بودی! [دعایی]
- تو را من چشم در راهم [عاطفی]

حدس‌های ریاضی که هنوز درستی آن‌ها اثبات یا رد نشده است، گزاره محسوب می‌شوند.

- هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت. [حدس گلدباخ]
- بی‌نهایت عدد اول مانند p وجود دارد که $p+۲$ هم اول باشد.

جمله‌های خبری که نتوانیم ارزش آن‌ها را تعیین کنیم، گزاره محسوب نمی‌شوند.

- درس ریاضی از فیزیک آسان‌تر است.
- عربی دشوارترین درس است.
- کنکور امسال خیلی مفهومی بود.
- روزبه قد بلند است.

کدام یک از گزینه‌های زیر یک گزاره است؟

۱) قد علی از رضا بلندتر است.
۲) علی قد بلند است.
۳) علی از رضا خوشگل‌تر است.
۴) علی خوشگل است.

۱ گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ همگی به سلیقهٔ افراد مرتبط هستند و تنها گزینهٔ ۱ یک جملهٔ خبری با ارزش درست یا نادرست است.

۲ جدول ارزش گزاره‌ها

هر گزاره همواره دارای یکی از دو ارزش درست یا نادرست است. بنابراین اگر دو گزاره مانند p و q را در نظر بگیرید، آن‌گاه برای ارزش آن‌ها می‌توان یک جدول به شکل مقابل تشکیل داد که دارای ۴ حالت است.

q	p
د	د
ن	د
د	ن
ن	ن

اگر ارزش یک گزاره همواره درست باشد آن را با T و اگر ارزش آن همواره نادرست باشد با F نشان می‌دهند. [این دو حرف، حروف اول کلمات True و False هستند.]

به‌طور کلی اگر n گزاره داشته باشیم، جدول ارزش آن‌ها دارای ۲^n سطر است.

اگر از میان تعدادی گزاره، یک گزاره را حذف کنیم از تعداد سطرهای جدول ارزش گزاره‌ها ۸ سطر کم می‌شود، تعداد گزاره‌های اولیه کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۶

۳ فرض کنیم تعداد گزاره‌ها در ابتدا برابر n باشد، در این صورت جدول ارزش آن‌ها دارای ۲^n سطر خواهد بود و در نتیجه:

$$۲^n - ۸ = ۲^{n-۱} \Rightarrow ۲^n - ۲^{n-۱} = ۸ \Rightarrow ۲^{n-۱} \times (۲-۱) = ۸ \Rightarrow ۲^{n-۱} = ۲^۳ \Rightarrow n-۱ = ۳ \Rightarrow n = ۴$$

در جدول ارزش گزاره‌های p, q, r, s چند بار حرف «ن» به معنای نادرست نوشته می‌شود؟

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۳ در جدول ارزش n گزاره، ۲^n سطر و n ستون وجود دارد. یعنی در مجموع $n \times ۲^n$ بار حرف «ن» و «د» نوشته می‌شود که از این تعداد نصفی حرف «ن» و نصفی دیگر حرف «د» هستند، بنابراین تعداد «ن»ها برابر با $n \times ۲^{n-۱}$ است که در اینجا $n = ۴$ است، بنابراین جواب $۴ \times ۲^۳ = ۳۲$ است.

جزوه طلایی
خرید آنلاین در gajmarket.com

درس دوم — مجموعه - زیر مجموعه

ص ۱۹ تا ۲۵ کتاب آمار و ...

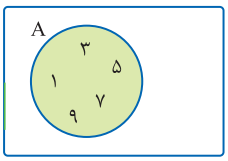
۲۱ مجموعه

مجموعه را دسته‌ای از اشیای متمایز و خوش تعریف در نظر می‌گیرند. [خوش تعریف به معنی آن است که بدون تردید و به یقین بتوان گفت که شیء معینی در مجموعه هست یا نه].

♣ دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم تهران مجموعه است.

♣ دانش‌آموزان قدبلند تهران مجموعه نیست. چون قدبلند خوش تعریف نیست.

انواع نمایش مجموعه‌ها

نمایش با اعضاء	نمایش با نماد ریاضی	نمایش هندسی
اعضای مجموعه را به صورت مرتب یا نامرتب درون یک جفت آکولاد نمایش می‌دهیم.	به جای نوشتن اعضاء، ویژگی مشترک بین آن‌ها را می‌نویسیم.	اعضای مجموعه را درون یک خم بسته در صفحه مانندمستطیل، دایره و ... قرار می‌دهیم که به آن نمودار وِن گفته می‌شود.
$A=\{1,3,5,7,9\}$	$A=\{2k-1 : k\in\mathbb{N}, 1\le k\le 5\}$	

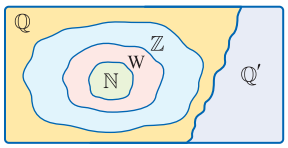
ترتیب عضوها در مجموعه اهمیتی ندارد. یعنی جابه‌جایی عضوها مجموعه را تغییر نمی‌دهند.

♣ $\{1,2,3\}=\{3,1,2\}=\{2,1,3\}$

عضوهای تکراری در مجموعه شمرده نمی‌شوند.

♣ $\{1,1,1,2,2,3,3,3,3,3\}=\{1,2,3\}$

مجموعه‌های مهم اعداد

اعداد طبیعی	$\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$	
اعداد حسابی	$\mathbb{W}=\{0,1,2,3,\ldots\}$	
اعداد صحیح	$\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$	$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$
اعداد گویا	$\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n} \mid m,n\in\mathbb{Z}, n\neq 0\}$	
اعداد گنگ	$\mathbb{Q}'=\{x \mid x\notin\mathbb{Q}\}$	
اعداد حقیقی	$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$	

مجموعهٔ اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهند و شامل همهٔ اعداد گویا و گنگ است، بنابراین روابط زیر برقرار است:

$$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}' \qquad \mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}' \qquad \mathbb{R}-\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}$$

مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن با شمردن به‌دست آید، مجموعهٔ متناهی نام دارد؛ حتی اگر شمردن تعداد اعضای آن سخت و زمان‌گیر باشد. به بیان دیگر تعداد اعضای مجموعهٔ متناهی، عددی حسابی است.

♣ مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج یک رقمی به صورت $\{2,4,6,8\}$ است که یک مجموعهٔ متناهی است.

مجموعه‌ای که متناهی نباشد، یعنی تعداد اعضای آن حتی با صرف زمان خیلی زیاد و امکانات کافی هم قابل شمردن نباشد، مجموعهٔ نامتناهی نام دارد. در واقع تعداد اعضای مجموعهٔ نامتناهی، با یک عدد حسابی قابل بیان نیست و از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است.

♣ مضارب طبیعی عدد ۵، به صورت $\{5,10,15,\ldots\}$ است که یک مجموعهٔ نامتناهی است.

اگر $n\in\mathbb{N}$ و $A_n=\{m\in\mathbb{Z} : m>-n, 2^m\le 2n\}$ باشد، مجموعهٔ $(A_8-A_4)\cup A_1$ چند عضو دارد؟ (داخل ـ ۹۶)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳ ابتدا A_8, A_4, A_1 را با اعضا مشخص می‌کنیم:

$A_1=\{m\in\mathbb{Z} \mid m>-1, 2^m\le 2\}=\{0,1\}$

$A_4=\{m\in\mathbb{Z} \mid m>-4, 2^m\le 8\}=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

$A_8=\{m\in\mathbb{Z} \mid m>-8, 2^m\le 16\}=\{-7,-6,-5,\ldots,0,1,2,3,4\}$

$(A_8-A_4)\cup A_1=\{-7,-6,-5,-4,4\}\cup\{0,1\}=\{-7,-6,-5,-4,0,1,4\}$ ⇐ ۷ عضو

خرید آنلاین در gajmarket.com

۲۲ تهی و مرجع و مجموعهٔ متمم

مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعهٔ تهی نامیده می‌شود و با نماد $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نشان داده می‌شود. $\varnothing=\{x|x\neq x\}$

مجموعهٔ $\{\varnothing\}$ یک مجموعهٔ تک‌عضوی است و با مجموعهٔ $\varnothing$ متفاوت است. $\{\varnothing\}=\{\{\ \}\}$

هر مجموعه معمولاً به صورت $A=\{x:x\in U, x$ {شرطی دربارهٔ $x\}$ معرفی می‌شود. به مجموعهٔ U که xها از درون آن انتخاب می‌شوند، مجموعهٔ مرجع گفته می‌شود.

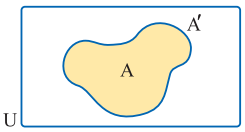
فرض کنید A مجموعه‌ای با مرجع U باشد، متمم مجموعهٔ A برابر با اعضایی از U است که متعلق به مجموعهٔ A نباشد. متمم A را با A' نشان می‌دهند.

$$A'=\{x\in U: x\notin A\}$$

$A\cup A'=U$ | $A\cap A'=\varnothing$

$U'=\varnothing$ | $\varnothing'=U$

$$(A')'=A$$



اگر مجموعهٔ مرجع، اعداد طبیعی یک رقمی باشد، آنگاه متمم $A=\{x\in\mathbb{N}: 2^x<x^2+1\}$ چند عضوی است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

۲ ابتدا اعضای A را مشخص می‌کنیم: $A=\{x\in\mathbb{N}:2^x<x^2+1\}=\{2,3,4\}\Rightarrow A'=\{1,5,6,7,8,9\}$

۲۳ تعلق و زیر مجموعه

نماد $\in$ به معنی تعلق داشتن و عضو بودن می‌باشد. وقتی می‌نویسیم $a\in A$ باید خود a عیناً درون مجموعه باشد.

$A=\{a,\{b\}\}\Rightarrow a\in A,\ \{b\}\in A,\ \{a\}\notin A,\ b\notin A$

نماد $\subseteq$ به معنی زیرمجموعه است. مجموعهٔ A را زیرمجموعهٔ B می‌نامند، هرگاه هر عضو دلخواه از مجموعهٔ A درون مجموعهٔ B باشد.

در این صورت می‌نویسیم: $A\subseteq B$

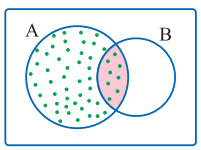
$$A\subseteq B\Leftrightarrow\forall x\,;\,(x\in A\Rightarrow x\in B)$$

وقتی نوشته می‌شود $A\subseteq\{\ldots,$ ▲, ■, ⬭$\}$ باید با حذف آکولاد، تمام عضوهای درون آن یعنی ⬭، ■، ▲ و ... تک‌تک درون مجموعهٔ A باشند.

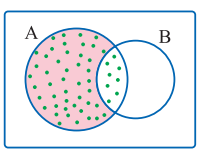
$A=\{a,\{b\}\}\Rightarrow\{a\}\subseteq A\ ,\ \{b\}\not\subseteq A$

چند قانون مقدماتی در زیرمجموعه

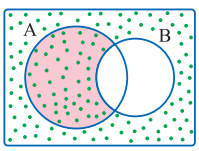
1 $\varnothing\subseteq A$ | 2 $A\subseteq A$ | 3 $A\subseteq U$



4 $(A\cap B)\subseteq A$



5 $(A-B)\subseteq A$



6 $(A-B)\subseteq B'$

اگر بدانیم $A\subseteq B$ است، هرکدام از موارد زیر برقرار است و برعکس از هر کدام از موارد زیر می‌توان نتیجه گرفت که $A\subseteq B$ است:

1 $A\cup B=B$ | 2 $A\cap B=A$ | 3 $B'\subseteq A'$ | 4 $A-B=\varnothing$

اگر $A=\{1,2\}, B=\{1,2,\{1,2\}\}, C=\{\{1,2,\{1,2\}\}\}$ باشند، کدام بیان در مورد این مجموعه‌ها نادرست است؟ (خارج- ۹۷)

۱) $B\subseteq C$ ۲) $A\in B$ ۳) $A\subseteq B$ ۴) $B\in C$

۱ مجموعهٔ B متعلق به مجموعهٔ C است و زیرمجموعهٔ آن نیست.

جزوه طلایی
خرید آنلاین در gajmarket.com

درس صفرم — احتمال کتاب دهم

ص ۱۴۲ تا ۱۵۲ کتاب دهم

۴۱ فضای نمونه

به پدیده‌ای که قبل از رخداد نتیجه‌اش معلوم نباشد، ولی مجموعهٔ نتایج ممکن آن مشخص باشد، آزمایش تصادفی می‌گوییم.

پرتاب تاس، پرتاب سکه، انتخاب مهره از جعبه، تولد فرزندان و ... همگی آزمایش‌های تصادفی هستند.

به مجموعهٔ همهٔ نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، فضای نمونهٔ آن آزمایش تصادفی می‌گویند و آن را با S نشان می‌دهند.

اگر یک وجه تاسی سفید و روی وجوه دیگر آن، اعداد ۱ , ۲, ۳، ۴و ۵ حک شده باشد، چون فضای نمونه، مجموعهٔ همهٔ نتایج ممکن است و «سفید آمدن» نیز یکی از این نتایج است، بنابراین فضای نمونه به‌صورت $S=\{1,2,3,4,5,\text{سفید}\}$ می‌باشد که دارای ۶ عضو است.

فضای نمونهٔ پرتاب n سکه، دارای $\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{n}=2^n$ عضو است [فضای نمونهٔ تولد n فرزند نیز به‌همین صورت است].

فضای نمونهٔ پرتاب سه سکه: $S=\{(\text{پ},\text{پ},\text{پ}),(\text{پ},\text{پ},\text{ر}),(\text{پ},\text{ر},\text{پ}),(\text{پ},\text{ر},\text{ر}),(\text{ر},\text{پ},\text{پ}),(\text{ر},\text{پ},\text{ر}),(\text{ر},\text{ر},\text{پ}),(\text{ر},\text{ر},\text{ر})\}$

فضای نمونهٔ پرتاب n تاس، دارای $\underbrace{6\times6\times\cdots\times6}_{n}=6^n$ عضو است.

فضای نمونهٔ پرتاب دو تاس: $S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$

در جعبه‌ای که مهره‌های رنگی در آن وجود داشته باشد، چه مهره‌ها متمایز باشند و چه مشابه، برای حل مسئله‌های احتمال باید آن‌ها را متمایز فرض کنیم و بر این اساس تعداد عضوهای فضای نمونه را به‌دست آوریم.

اگر در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز مشابه و ۲ مهرهٔ آبی مشابه وجود داشته باشد یک مهره به تصادف از ظرف خارج کنیم، فضای نمونه دارای ۵ عضو است.

$S=\{R_1,R_2,R_3,B_1,B_2\}$

در خانواده‌ای با ۳ فرزند، می‌دانیم فرزند اول و دوم دو قلو هستند، فضای نمونه جنسیت فرزندان خانواده چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۳

۳ دوقلو بودن فرزندان در جنسیت آن‌ها تأثیری ندارد. از طرفی جنسیت هر فرزند دو حالت دارد؛ بنابراین فضای نمونهٔ جنسیت فرزندان این خانواده $2^3=8$ عضو دارد.

۴۲ مفهوم پیشامد و برآمد

هر زیرمجموعه از فضای نمونه را یک پیشامد و هر یک از اعضای یک پیشامد را برآمد می‌نامند. پیشامدها را معمولاً با $A,B,C,\ldots$ نشان می‌دهند.

در پرتاب یک تاس، پیشامد مضرب ۳ آمدن به‌صورت $A=\{3,6\}$ و در پرتاب سه سکه، پیشامد «دقیقاً دو بار رو» آمدن مجموعه‌ای ۳ عضوی به‌صورت $A=\{(\text{ر},\text{پ},\text{ر}),(\text{ر},\text{ر},\text{پ}),(\text{پ},\text{ر},\text{ر})\}$ است.

در هر فضای نمونه مانند S ، خود S پیشامد قطعی و $\varnothing$ را پیشامد غیرممکن می‌نامند.

اگر فضای نمونه دارای n عضو باشد برای آن می‌توان 2^n پیشامد در نظر گرفت، چون هر عضو از فضای نمونه می‌تواند در پیشامد حضور داشته باشد یا نه.

(To be OR not to be...)

دو سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. چند پیشامد ناتهی در این آزمایش تصادفی ممکن است به وجود آید؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۲ هر پیشامد زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه است. از طرفی فضای نمونهٔ پرتاب دو سکه به صورت $S=\{(\text{ر},\text{ر}),(\text{پ},\text{پ}),(\text{ر},\text{پ}),(\text{پ},\text{ر})\}$ است. حال این مجموعهٔ ۴عضوی دارای 2^4 زیرمجموعه است که یکی از آن‌ها تهی است. بنابراین ۱۵ زیر مجموعهٔ ناتهی دارد، که هر کدام یک پیشامد محسوب می‌شود.

جزوه طلایی
خرید آنلاین در gajmarket.com

۴۳ مفهوم رخداد پیشامد

هنگامی می‌گوییم یک پیشامد رخ داده است که نتیجهٔ آزمایش، یکی از عضوهای آن پیشامد باشد [یعنی بعد از انجام آزمایش، یکی از اعضای آن پیشامد دیده شود].

وقتی گفته می‌شود در پرتاب یک تاس پیشامد زوج بودن رُخ داده است، یعنی بعد از پرتاب تاس یا ۲ آمده یا ۴ آمده یا ۶ آمده است.

هرگز امکان ندارد دو برآمد مختلف از یک فضای نمونه با هم دیده شوند. امّا امکان رخ دادن دو پیشامد مختلف با هم وجود دارد.

امکان ندارد در پرتاب یک تاس برآمد ۲ و برآمد ۴ با هم رخ دهند، اما ممکن است پیشامد زوج آمدن و پیشامد عدد اول آمدن با هم رخ دهند و آن هم زمانی است که ۲ بیاید.

اگر $S=\{a,1,b,5\}$ یک فضای نمونه‌ای و $A=\{b,1\}$ یک پیشامد و نتیجهٔ آزمایش b باشد، آنگاه:

۱) A رخ داده است.
۲) A رخ نداده است.
۳) $\{b\}$ یک پیشامد مطمئن است.
۴) $\{1\}$ یک پیشامد ناممکن است.

۱ چون یکی از اعضای پیشامد A به عنوان نتیجهٔ آزمایش رو شده است بنابراین A رخ داده است.

۴۴ پیشامد پرتاب چند سکه

در مسائل مربوط به پیشامدها در پرتاب چند سکه معمولاً با سه تیپ مسئله ممکن است مواجه شویم:

۱ در پرتاب چند سکه[یا تولد چند فرزند در یک خانواده] اگر وضعیت بعضی از پرتاب‌ها [جنسیت بعضی از فرزندان] را معلوم کنند، تعداد حالات آن‌ها را برابر ۱ در نظر می‌گیریم و سایر پرتاب‌ها [سایر فرزندان] همچنان ۲ حالت خواهند داشت، سپس طبق اصل ضرب تعداد عضوهای پیشامد را پیدا می‌کنیم.

در خانواده‌ای با ۵ فرزند، پیشامد A که در آن «فرزند بزرگ‌تر، پسر و فرزند کوچک‌تر، دختر باشد»، چند عضو دارد؟

فرزند بزرگ و فرزند کوچک هر کدام یک حالت دارند و بقیه فرزندان هر کدام دو حالت دارند؛ بنابراین تعداد اعضای این پیشامد برابر است با:

$$n(A)=1\times2\times2\times2\times1=8$$

۲ در پرتاب چند سکه [تولد چند فرزند] اگر صحبت از تعداد «رو»ها و «پشت»ها [تعداد پسرها و دخترها] به میان آمده بود، از «انتخاب» استفاده می‌کنیم.

در یک خانوادهٔ چهار فرزندی هر یک از پیشامدهای زیر چند عضو دارد؟

- پیشامد دقیقاً سه فرزند پسر: $n(A)=\binom{4}{3}=4$
- پیشامد دقیقاً یک فرزند دختر: $n(B)=\binom{4}{1}=4$
- پیشامد حداقل سه فرزند پسر: $n(C)=\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=5$
- پیشامد حداکثر دو فرزند دختر: $n(D)=\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}=11$

۳ در بعضی موارد در پرتاب سکه یا تولد فرزندان مجبور به نوشتن تمام حالات ممکن برای پیشامد خواسته شده هستیم؛ در این حالت باید دقت کرد که ترتیب دارای اهمیت است.

در پرتاب ۵ سکه، پیشامد «یک در میان پشت و رو» چند عضو دارد؟

$A=\{(پ,ر,پ,ر,پ),(ر,پ,ر,پ,ر)\}$ ⇒ $n(A)=2$

در یک خانواده با ۶ فرزند، تعداد عضوهای پیشامد A که «خانواده دارای ۳ دختر بوده ولی بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین فرزندان خانواده پسر باشد»، چند عضو دارد؟

۱) ۱۶
۲) ۸
۳) ۴
۴) ۱۲

۳ بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین فرزندان که پسر هستند ۱ حالت دارند بنابراین آن‌ها را کنار می‌گذاریم، اکنون حالتی پیش می‌آید که انگار در یک خانواده با ۴ فرزند می‌خواهیم ۳ دختر داشته باشیم که تعداد حالات برابر است با:

$$n(A)=\binom{4}{3}=4$$

جزوه طلایی
خرید آنلاین در gajmarket.com

درس اول مبانی احتمال

ص ۴۸ تا ۵۱ کتاب آمار و ...

۶۴ علم آمار - علم احتمال

علم آمار در پی شناخت جامعهٔ نامعلوم با استفاده از نمونه‌های جمع‌آوری شدهٔ معلوم است.

پدیده‌هایی که با «شمارش» و «تعداد» سروکار دارند، مربوط به علم آمار هستند.

علم احتمال در پی بررسی یک نمونهٔ نامعلوم از یک جامعهٔ معلوم است و به نوعی در جهت عکس علم آمار است.

پدیده‌هایی که می‌خواهیم «امکان» و «شانس» آن‌ها را بررسی کنیم، مربوط به علم احتمال هستند.

کدام‌یک از موارد زیر مربوط به علم احتمال است؟

۱) میزان بارش باران در سال گذشته
۲) تعداد رأی دهندگان در انتخابات مجلس نمایندگان طی دهه‌های پیش
۳) درصد رشد نرخ تورم طی یک دوره ریاست جمهوری
۴) امکان افزایش دست‌مزد و حقوق در سال آینده

۴ گزینه‌های ۱، ۲، ۳ همگی با شمارش و تعداد سر و کار دارند، پس به علم آمار مربوط هستند. اما در گزینهٔ ۴ صحبت از امکان است که به علم احتمال مربوط است.

کدام‌یک از موارد زیر مربوط به علم آمار است؟

۱) امکان بازگشت سرمایهٔ شرکت بعد از تبلیغات
۲) شانس درمان ۵ نفر از گروهی که ۳۰ درصد آن‌ها به بیماری مبتلا هستند.
۳) امکان افزایش قیمت دلار در فصل تابستان
۴) تعداد کارخانه‌هایی که در اثر افزایش قیمت دلار ورشکست شده‌اند.

۴ گزینه‌های ۱، ۲، ۳ همگی امکان و شانس را بیان می‌کنند، پس به علم احتمال مربوط هستند. اما در گزینهٔ ۴ صحبت از تعداد است که به علم آمار مربوط است.

جزوه طلایی

۶۵ فضای نمونه در آزمایش‌های توأم

اگر یک آزمایش تصادفی از دو آزمایش مجزا با فضای نمونهٔ S_1 و S_2 تشکیل شده باشد و این دو آزمایش توأم با هم انجام شود یا یکی پس از دیگری انجام شود، فضای نمونهٔ این آزمایش مرکب، برابر با ضرب دکارتی دو فضای نمونهٔ اولیه است.

$$S = S_1 \times S_2$$

فضای نمونهٔ پرتاب یک سکه $S = \{ر, پ\}$ است. حال اگر دو سکه را با هم پرتاب کنیم، فضای نمونه به صورت زیر خواهد بود:

$$S = S_1 \times S_2 = \{(ر, ر)، (ر, پ)، (پ, ر)، (پ, پ)\}$$

یک رانندهٔ وَن خطی در ایستگاه منتظر مسافر می‌ماند تا حداکثر ۸ مسافر سوار کند. البته ممکن است با حداقل ۳ مسافر هم حرکت کند. در مسیر برگشت با کمتر از ۵ مسافر برنمی‌گردد. فضای نمونه برای توصیف چنین پدیده‌ای اگر فقط تعداد مسافرها برای ما مهم باشد، چند عضو دارد؟

۱) ۲۰
۲) ۱۸
۳) ۲۴
۴) ۱۶

۳ تعداد مسافرها در مسیر رفت یکی از اعداد مجموعهٔ $S_1 = \{۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$ و تعداد مسافرها در مسیر برگشت یکی از اعداد مجموعهٔ $S_2 = \{۵, ۶, ۷, ۸\}$ است. بنابراین تعداد عضوهای فضای نمونه برابر است با:

$$n(S) = n(S_1) \times n(S_2) = ۶ \times ۴ = ۲۴$$

خرید آنلاین در gajmarket.com

آزمایش‌های تصادفی دوحالته مانند پرتاب سکه، تولد بچه و ... را امتحان می‌نامیم. در هر امتحان، پیشامدی که مطلوب ماست پیروزی و آن چیزی که مطلوب ما نیست و مسأله آن را نمی‌خواهد، شکست نامیده می‌شود. این مسائل معمولاً دو تیپ عمده دارند:

۱ اگر یک امتحان را پی‌درپی تکرار کنیم تا اولین پیروزی در آزمایش n اُم حاصل شود، بدان معنی است که $n-1$ آزمایش اولیه، همگی با شکست مواجه شده است و در آزمایش n اُم اولین پیروزی حاصل شده است. بنابراین احتمال آن برابر است با: [p احتمال پیروزی در یک آزمایش و q احتمال شکست در یک آزمایش است]

$$\text{احتمال اولین پیروزی در آزمایش } n \text{ اُم} = \underbrace{(q\times q\times\cdots\times q)}_{n-1 \text{ بار شکست}}\times\underbrace{p}_{\text{پیروزی}} = q^{n-1}\times p$$

وقتی می‌گوییم تاسی را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار در پرتاب پنجم عدد «۲» بیاید، یعنی ۴ بار اول نباید «۲» بیاید و بار پنجم باید «۲» بیاید:

$$P=\underbrace{(\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6})}_{\text{۴ شکست}}\times\underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{پیروزی}}=(\frac{5}{6})^4(\frac{1}{6})$$

فضاهای نمونهٔ بیش از دوعضوی را نیز می‌توان امتحان تلقی کرد، مثلاً در پرتاب تاس اگر «۲ آمدن» مطلوب است، «۲ آمدن» پیروزی و «۲ نیامدن» شکست محسوب می‌شود.

۲ اگر یک آزمایش تصادفی دوحالته که احتمال پیروزی آن p و احتمال شکست آن q است را n بار تکرار کنیم و بخواهیم k بار پیروز شویم، باید احتمال k پیروزی در آزمایش‌های اول و $n-k$ شکست در آزمایش‌های بعدی را حساب کنیم و جواب را در جایگشت این شکست‌ها و پیروزی‌ها ضرب کنیم، چون جای شکست‌ها و پیروزی‌ها مهم نیست و فقط تعداد آن‌ها اهمیت دارد:

$$\text{احتمال } k \text{ پیروزی در } n \text{ آزمایش} = \underbrace{p\times p\times\cdots\times p}_{k \text{ بار پیروزی}}\times\underbrace{q\times q\times\cdots\times q}_{n-k \text{ بار شکست}}\times\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

در یک بیمارستان شانس موفقیّت در یک عمل جراحی $\frac{4}{5}$ است. اگر این عمل جراحی روی ۶ نفر انجام شود احتمال آن‌که فقط یک عمل با شکست همراه باشد چقدر است؟

اگر احتمال موفقیّت در عمل برابر با $p=\frac{4}{5}$ باشد آنگاه احتمال شکست برابر با $q=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$ است. از طرفی دیگر یک شکست در ۶ عمل متناظر با ۵ موفقیّت است و با توجه به فرمول فوق، احتمال مطلوب به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{6!}{5!1!}=\binom{6}{5}(\frac{4}{5})^5(\frac{1}{5})$$

دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار، هر دو زوج بیایند، باکدام احتمال حداکثر در ۳ پرتاب نتیجه حاصل می‌شود؟ (داخل - ۹۱)

۱) $\frac{27}{64}$ ۲) $\frac{37}{64}$ ۳) $\frac{19}{32}$ ۴) $\frac{39}{64}$

۲ می‌دانیم در پرتاب دو تاس، احتمال این که هر دو عدد روشده زوج باشد برابر $\frac{1}{4}=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}$ است. بنابراین حداکثر در ۳ پرتاب نتیجه حاصل شود یعنی یا بار اول هر دو زوج بیاید یا بار اول نیاید و بار دوم بیاید یا بار اول و دوم نیاید و بار سوم بیاید:

$$P(A)=\frac{1}{4}+(\frac{3}{4}\times\frac{1}{4})+(\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4})=\frac{16+12+9}{64}=\frac{37}{64}$$

تاسی را سه بار پرتاب می‌کنیم، احتمال آن‌که دو بار عدد بزرگتر از ۴ حاصل شود، کدام است؟

۱) $\frac{1}{72}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{36}$ ۴) $\frac{2}{9}$

۴ چون قرار است دو بار از سه بار موفق شویم جایگشت پیروزی‌ها و شکست‌ها را نیز باید در نظر گرفت:

$$P=\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{3!}{2!}=\frac{2}{9}$$

جزوه طلایی
خرید آنلاین در gajmarket.com

درس سوم — احتمال شرطی

ص ۵۲ تا ۶۶ کتاب آمار و ...

در بعضی از مسائل احتمال که به احتمال شرطی مشهور است، جمله‌ای گفته می‌شود که قسمتی از فضای نمونه را افشا می‌کند. در این موارد قسمت‌هایی از فضای نمونه را که پوچ شده است از فضای نمونه کنار می‌گذاریم و فضای نمونه را کوچک می‌کنیم و احتمال خواسته شده را روی این فضای نمونهٔ کوچک‌تر به دست می‌آوریم. بنابراین ساختار کلی احتمال‌های شرطی به صورت زیر است:

آزمایشی صورت گرفته است. ← پیشامد B رُخ داده است ← احتمال رخداد A چقدر است؟

بنابراین برای حل این مدل از مسائل احتمال، می‌توانیم به‌ترتیب زیر عمل کنیم:

۱ فضای نمونهٔ اصلی را در نظر می‌گیریم. ۲ با توجه به شرط یا اطلاعی که از نتیجهٔ آزمایش به ما داده شده، فضای نمونهٔ جدیدی (پیشامد B) ایجاد می‌کنیم. به این فضای نمونهٔ جدید، «فضای نمونهٔ محدود شده» یا «فضای نمونهٔ کاهش یافته» می‌گویند. ۳ احتمال پیشامد مطلوب (پیشامد A) را در فضای نمونهٔ جدید حساب می‌کنیم.

ساختار کلی جملاتی که در احتمال‌های شرطی به کار می‌روند

۱ ---- اگر ---- احتمال آن‌که ---- ؟	۵ ---- مشاهده شده ---- احتمال آن‌که ---- ؟
۲ ---- می‌دانیم ---- احتمال آن‌که ---- ؟	۶ ---- دیدیم ---- احتمال آن‌که ---- ؟
۳ ---- مشروط بر آن‌که ---- احتمال آن‌که ---- ؟	۷ ---- در صورتی که ---- احتمال آن‌که ---- ؟
۴ ---- ملاحظه شده است که ---- احتمال آن‌که ---- ؟	۸ ---- به شرط آن‌که ---- احتمال آن‌که ---- ؟

در برخی از مسائل در احتمال‌های شرطی ممکن است طراح از به کار بردن واژه‌هایی مانند «اگر، می‌دانیم، در صورتی که بدانیم، مشروط بر آن‌که و ...» خودداری کند و آن‌ها را در مفهوم مسأله پنهان کند؛ یعنی خیلی ریلکس و عادی خبری را اعلام می‌کند که به وسیلهٔ آن قسمتی از فضای نمونه افشا می‌شود. سپس بلافاصله بعد از آن سؤالی مطرح می‌کند. این مسئله‌ها کمی فنی‌تر و دقیق‌تر از حالت قبل هستند و باید خوب به جمله‌بندی این‌گونه مسائل دقت کنید.

تاسی را پرتاب کردیم مضرب ۳ نیامده است (خبری که ریلکس و عادی اعلام شد.) احتمال آمدن عدد اول کدام است؟ (احتمال خواسته‌شده)

■ $S=\{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow S_{new}=\{1,2,4,5\} \Rightarrow A=\{2,5\} \Rightarrow P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

در کیسه‌ای ۲ مهرهٔ قرمز، ۳ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سبز هست. یک مهره به تصادف از این کیسه برمی‌داریم. اگر این مهره قرمز نباشد احتمال آن‌که سفید باشد چقدر است؟

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{3}{9}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) ۱

۳ چون می‌دانیم این مهره قرمز نیست، پس مهرهٔ انتخابی از میان ۳ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سبز است. بنابراین فضای نمونهٔ جدید دارای ۷ عضو بوده و احتمال خارج شدن مهرهٔ سفید در این فضای نمونه برابر با $P(A)=\frac{3}{7}$ است.

یک تاس همگن را انداختیم، برآمد حاصل مضرب ۳ نیست. احتمال آن که شمارهٔ ظاهر شده ۲ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۳ برآمد حاصل مضرب ۳ نیست، پس ۳ و ۶ را از فضای نمونه کنار می‌گذاریم:

$S_{new}=\{1,2,4,5\}, A=\{2\} \Rightarrow P(A)=\frac{1}{4}$

جزوه طلایی
خرید آنلاین در gajmarket.com

درس چهارم پیشامدهای مستقل و وابسته

ص ۶۷ تا ۷۲ کتاب آمار و ...

۹۲ دو پیشامد مستقل

دو پیشامد را مستقل می‌گویند هرگاه آگاهی از رخ دادن یکی از آن‌ها، احتمال رخ دادن دیگری را تغییر ندهد؛ یعنی اگر از رخ دادن یکی از پیشامدها خبردار شویم احتمال رخ دادن پیشامد دیگر، برای ما تغییر نکند. به عبارت دیگر:

$$A \text{ و } B \text{ مستقل‌اند} \Leftrightarrow P(B|A)=P(B)$$

بیان سادهٔ این حرف آن است که دو پیشامد وقتی مستقل‌اند که روی هم تأثیری نداشته باشند.

می‌دانیم که شانس دختربودن (یا پسربودن) یک فرزند برابر با $\frac{1}{2}$ است. حالا خانواده‌ای را فرض کنید که دو فرزند دختر دارد. اگر این خانواده در انتظار تولد فرزند دیگری باشد احتمال آن که این فرزند نیز دختر (یا پسر) باشد همچنان برابر $\frac{1}{2}$ است. یعنی آگاهی از جنسیت فرزندان اول و دوم، شانس دختر بودن (یا پسربودن) فرزند سوم را تغییر نمی‌دهد بنابراین این پیشامدها نسبت به هم مستقل هستند.

اگر A و B دو پیشامد ناتهی باشند آنگاه A و B در صورتی مستقل‌اند که احتمال اشتراک آن‌ها برابر با حاصل‌ضرب احتمال آن‌ها باشد:

$$A \text{ و } B \text{ مستقل‌اند} \Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

اگر دو پیشامد مستقل نباشند آن‌ها را وابسته می‌نامند. اگر دو پیشامد وابسته باشند رابطهٔ فوق بین آن‌ها برقرار نیست.

اگر $P(A)=\frac{3}{5}$ و $P(B)=\frac{1}{3}$ و A و B دو پیشامد مستقل باشند آن‌گاه احتمال آن که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد چقدر است؟

چون A و B مستقل‌اند بنابراین $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ است و در نتیجه احتمال اجتماع آن‌ها برابر است با:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)=\frac{3}{5}+\frac{1}{3}-(\frac{3}{5}\times\frac{1}{3})=\frac{9+5}{15}-\frac{3}{15}=\frac{11}{15}$$

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، متمم هرکدام نسبت به دیگری و همچنین متمم‌های آن‌ها نیز مستقل‌اند

A و B' مستقل‌اند.	A' و B مستقل‌اند.	A' و B' مستقل‌اند.
$P(A\cap B')=P(A)\times P(B')$	$P(A'\cap B)=P(A')\times P(B)$	$P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')$

پیشامد «۶» آمدن در پرتاب یک تاس به «رو» آمدن در پرتاب سکه هیچ ربطی ندارد و مستقل از هم محسوب می‌شوند، «۶» نیامدن در پرتاب تاس هم به «رو» آمدن سکه ربطی ندارد و مستقل محسوب می‌شود و ...

A و B دو پیشامد مستقل‌اند به طوری که $P(A)=0/3$ و $P(B)=0/8$. احتمال آن که فقط B رخ دهد را حساب کنید.

A و B مستقل‌اند پس A و B' نیز مستقل‌اند. بنابراین: $P(B-A)=P(B\cap A')=P(B)P(A')=0/8\times 0/7=0/56$

احتمال موفقیت فردی، در یک آزمون مستقل، دو برابر احتمال موفقیت دوست وی است. احتمال موفقیت لااقل یکی از آن‌دو، $\frac{7}{9}$ است. احتمال موفقیت این فرد کدام است؟ (خارج - ۹۸)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۴ احتمال موفقیت شخص A دو برابر B است. اگر $P(B)=x$ فرض شود، $P(A)=2x$ خواهد شد و داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)\Rightarrow\frac{7}{9}=2x+x-(2x)(x)\Rightarrow 2x^2-3x+\frac{7}{9}=0\Rightarrow 18x^2-27x+7=0\Rightarrow x=\frac{27\pm 15}{2\times 18}\Rightarrow x=\frac{7}{6},\frac{1}{3}$$

$\Delta=27^2-4\times 18\times 7=225$

بنابراین $P(B)=\frac{1}{3}$ بوده و در نتیجه احتمال موفقیت A برابر $2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ است.

جزوه طلایی
خرید آنلاین در gajmarket.com

۹۳ استقلال پرتاب‌ها

پرتاب دو تاس و به طور کلی پرتاب چند تاس مستقل از هم است و اگر چند تاس را پرتاب کنیم و سؤال دربارهٔ سرنوشت تک‌تک آن‌ها به طور جداگانه مطرح شده باشد، کافی است احتمال هر کدام را حساب کنیم و حاصل‌ها را در هم ضرب کنیم.

پرتاب دو سکه و به طور کلی پرتاب چند سکه مستقل از هم است و اگر چند سکه را پرتاب کنیم و سؤال دربارهٔ سرنوشت هر کدام از آن‌ها به طور جداگانه مطرح شده باشد، هر کدام از احتمال‌ها را جداگانه حساب می‌کنیم و حاصل احتمال‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

در این نوع احتمال‌های مستقل، اگر دربارهٔ سرنوشت یک یا چند سکه (یا تاس) سؤالی نشد [یعنی هرچه پیش آید، خوش آید!] احتمال آن را برابر یک فرض می‌کنیم.

یک تاس را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم احتمال آن‌که در پرتاب سوم عدد ۵ و در پرتاب هشتم عدد ۶ رو شود برابر با $\frac{۱}{۳۶}=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}$ است به عبارت دیگر وقتی دربارهٔ پرتاب‌های دیگر چیزی پرسیده نشده آن‌ها را نادیده می‌گیریم یعنی در محاسبه، احتمال آن‌ها را برابر یک فرض می‌کنیم.

دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، با کدام احتمال هر دو سکه «رو» یا تاس ۶ ظاهر می‌شود؟ (داخل - ۹۶)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

۱ پیشامد «ظاهر شدن دو رو» در پرتاب دو سکه و «ظاهر شدن عدد ۶» در تاس، مستقل‌اند، بنابراین احتمال اجتماع آن‌ها برابر است با:

$$P=P(\text{هر دو سکه رو})+P(\text{تاس ۶ بیاید})-P(\text{هر دو سکه رو}\cap\text{تاس ۶ بیاید})\Rightarrow P=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۶+۴-۱}{۲۴}=\frac{۹}{۲۴}=\frac{۳}{۸}$$

۹۴ استقلال در جنسیت فرزندان

فرزندان یک خانواده از لحاظ جنسیت مستقل از هم هستند و اگر دربارهٔ پسر و دختر بودن فرزند اول، دوم، سوم و ... بخواهیم بحث کنیم، احتمال هر کدام را جداگانه حساب کرده و در هم ضرب می‌کنیم [البته در حالت عادی احتمال پسر بودن و دختر بودن هر کدام $\frac{۱}{۲}$ است].

خانواده‌ای هفت فرزند دارد. احتمال آن‌که سه فرزند اول این خانواده دختر باشند برابر است با: $P=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}$

اگر فرزندان دوقلو یا چندقلو هم باشند باز هم هیچ تفاوتی در اصل ماجرا نخواهد داشت. در واقع دوقلو بودن در فرزندان خانواده مثل این است که دو سکه را با هم پرتاب کنیم.

خانواده‌ای سه فرزند دارد که دو فرزند اول، دوقلو هستند. احتمال آن‌که دوقلوها هم‌جنس نباشند و فرزند سوم پسر باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۲ دو قلو بودن فرزند اول و دوم تأثیری در روش محاسبهٔ احتمال ندارد بنابراین احتمال مطلوب برابر است با:

$$P=(\underset{\text{د}}{\frac{۱}{۲}}\times\underset{\text{پ}}{\frac{۱}{۲}}\times\underset{\text{پ}}{\frac{۱}{۲}})+(\underset{\text{پ}}{\frac{۱}{۲}}\times\underset{\text{د}}{\frac{۱}{۲}}\times\underset{\text{پ}}{\frac{۱}{۲}})=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

۹۵ استقلال در جعبه و مهره

انتخاب مهره از جعبه‌های مختلف پیشامدهایی مستقل از هم می‌باشند و اگر از هر کدام از جعبه‌ها جداگانه مهره انتخاب کنیم باید احتمال هر کدام از جعبه‌ها را برای خودش حساب کنیم و حاصل‌ها را در هم ضرب کنیم.

انتخاب چند مهره از یک جعبه وقتی مهره‌ها با جایگذاری انتخاب شوند، پیشامدهایی مستقل از هم است و هنگامی که سؤال دربارهٔ مهرهٔ اول و مهرهٔ دوم به طور جداگانه مطرح شده باشد، احتمال هر یک را حساب می‌کنیم و حاصل‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

جعبه‌ای دارای ۶ مهره با شماره‌های ۱ تا ۶ است. اگر دو مهره یکی پس از دیگری و با جایگذاری خارج کنیم، احتمال آن‌که بار اول مضرب ۳ و بار دوم فرد بیاید؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

۱ چون مهره‌ها با جایگذاری خارج می‌شوند، برداشت اول و دوم مستقل از هم هستند:

$$P=\frac{۲}{۶}\times\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۶}$$

جزوه طلایی
خرید آنلاین در gajmarket.com

درس اول توصیف و نمایش داده‌ها

ص ۷۴ تا ۸۳ کتاب آمار و ...

۱۰۰ اصطلاحات اولیه

مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات، آمار نامیده می‌شود. علم آمار مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی است، به عبارت دیگر مراحل علم آمار به‌صورت زیر است:

جمع‌آوری اعداد و ارقام ← سازماندهی و نمایش ← تحلیل و تفسیر داده‌ها ← نتیجه‌گیری قضاوت پیش‌بینی

واقعیت‌هایی دربارهٔ یک شیء یا فرد که در محاسبه، برنامه‌ریزی و پیش‌بینی به کار می‌روند، داده نام دارد.

هر ویژگی از اشیاء یا افراد که در اعضای جامعه یکسان نیستند و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کنند، متغیّر نامیده می‌شود.

عددی که به آن ویژگیِ یک عضو از جامعه، نسبت داده می‌شود مقدار متغیّر یا به اصطلاح مشاهده می‌گویند.

به مجموعهٔ تمام افراد یا اشیایی که می‌خواهیم در مورد آن‌ها داده‌ها را گردآوری کنیم، جامعهٔ آماری گفته می‌شود و به تعداد اعضای یک جامعهٔ آماری، اندازهٔ جامعه می‌گوییم.

به هر زیرمجموعه از جامعهٔ آماری که به روشی مشخص انتخاب شده باشد، نمونه می‌گویند و به تعداد عضوهای یک نمونه، اندازهٔ نمونه گفته می‌شود.

می‌خواهیم وزن افراد یک کلاس ۲۰ نفره را بررسی کنیم. برای این منظور ۵ نفر از آن‌ها را به عنوان نمونه انتخاب می‌کنیم و وزن آن‌ها را اندازه می‌گیریم. در این حالت «وزن دانش‌آموزان» یک متغیر تصادفی است زیرا از یک عضو به عضو دیگر می‌تواند تغییر کند. عدد وزن هر دانش‌آموز مقدار متغیر نام دارد. همچنین ۲۰ دانش‌آموز جامعهٔ آماری و اندازهٔ جامعه ۲۰ و ۵ دانش‌آموز یک نمونه است و اندازهٔ نمونه ۵ است.

۱۰۱ انواع متغیّر

متغیّرها را به دو دستهٔ کمّی و کیفی و هر کدام از آن‌ها را نیز به دو زیرگروه به صورت نمودار زیر می‌توان تقسیم کرد [برای حل تست‌های مربوط به انواع متغیّر، اول به این فکر می‌کنیم که آیا قابل اندازه‌گیری است یا نه؟ تا نوع کیفی و کمّی معلوم شود. سپس به سراغ زیرگروه‌های آن دسته می‌رویم.]

- انواع متغیر
  - کیفی: غیرقابل اندازه‌گیری هستند.
    - ترتیبی: دارای نوعی ترتیب طبیعی است.
    - اسمی: دارای هیچ ترتیب طبیعی نیست.
  - کمّی: قابل اندازه‌گیری هستند.
    - پیوسته: اگر دو مقدار a و b را بپذیرد هر عددی بین a و b را می‌پذیرد.
    - گسسته: اگر دو مقدار a و b را بپذیرد بعضی از اعداد بین a و b را نمی‌پذیرد.

وزن، قد، قطر تنهٔ درختان، حجم آب، دما، میزان آلودگی هوا، فشار هوا، زمان، سن و ... نمونه‌هایی از متغیّر کمّی پیوسته هستند.

تعداد طبقات ساختمان، درصد یک درس در کنکور، تعداد مسافران و ... نمونه‌هایی از متغیّر کمّی گسسته هستند.

گروه خونی، رنگ چشم، ملیّت، جنسیت، نوع آلودگی هوا، نژاد و ... نمونه‌هایی از متغیّر کیفی اسمی هستند.

مقام‌های یک ورزشکار، میزان لذت از آشپزی، مراحل رشد، مراحل تحصیل، درجهٔ افسران و ... نمونه‌هایی از متغیّر کیفی ترتیبی هستند.

متغیّرهایی که فقط نوع آن‌ها معلوم است کیفی هستند. مانند انواع گل‌های باغ/انواع حساب‌های بانکی/انواع مدارس و ...

در صورتی که اعداد نسبت داده شده به متغیر قابل معدل‌گیری باشند، می‌توان گفت آن متغیر کمّی است. اما اگر نتوان از اعداد مُعدل گرفت آن متغیر کیفی است. مانند مقام‌های ورزشکاران/رتبهٔ دانش‌آموزان و ...

نوع کدام یک از متغیرهای زیر با بقیه متفاوت است؟

۱) مراحل تحصیلی
۲) مراحل رشد
۳) وضعیت تأهل
۴) درجه سربازان

۳ گزینهٔ‌های ۱، ۲، ۴ کیفی ترتیبی هستند و گزینهٔ ۳ کیفی اسمی است.

جزوه طلایی
خرید آنلاین در gajmarket.com

۱۰۲ مفهوم کلمهٔ میزان

اگر کلمهٔ «میزان» در کنار کلماتی نظیر رضایت، سختی، لذت، علاقه‌مندی و ... بیاید، یک مفهوم کیفی دارد که می‌تواند کم، متوسط، زیاد یا خیلی زیاد و ... باشد، یعنی کیفی ترتیبی است.

اگر کلمهٔ «میزان» در کنار کلماتی نظیر بارش، مالیات، درآمد فروش و ... بیاید دقیقاً مفهوم عددی دارد و یک متغیر کمّی پیوسته است.

اگر کلمهٔ «میزان» در کنار آلودگی هوا بیاید، در دنیای امروز مفهوم کمّی دارد. چون امروزه ما می‌توانیم میزان آلودگی را اندازه بگیریم. اما شاید در گذشته که وسایل اندازه‌گیری وجود نداشت، می‌گفتیم میزان آلودگی بالاست یا پایین است، اما امروزه برحسب عدد بیان می‌شود.

میزان چه چیزهای کمّی و میزان چه چیزهای کیفی است؟

کمّی پیوسته	کیفی ترتیبی
میزان بارش، مالیات، درآمد فروش، آلودگی هوا و ...	میزان رضایت، سختی، لذت، علاقه‌مندی و، ...

نوع کدام یک از متغیرهای زیر با بقیه متفاوت است؟

۱) میزان لذت از آشپزی
۲) میزان رضایت از شرکت بیمه
۳) میزان علاقه‌مندی به کتاب‌خوانی
۴) میزان درآمد شرکت نفت

۴ گزینهٔ‌های ۱، ۲ و ۳ کیفی ترتیبی هستند و گزینهٔ ۴ کمّی پیوسته است.

۱۰۳ فراوانی و انواع آن

اگر برای بررسی یک متغیر خاص از یک جامعهٔ آماری، داده‌هایی گردآوری شده باشد، آنگاه تعداد کل داده‌ها را با n نمایش می‌دهیم. در این صورت سه نوع فراوانی برای داده‌ها تعریف می‌شود:

۱ به تعداد دفعاتی که هر داده تکرار (مشاهده) می‌شود، فراوانی آن داده می‌گوییم و آن را با f نشان می‌دهیم.

در یک کلاس با ۲۰ نفره، رنگ چشم ۱۰ نفر مشکی، ۵ نفر قهوه‌ای، ۳ نفر سبز و ۲ نفر آبی باشد، در این صورت فراوانی رنگ چشم مشکی $f_1=10$ است.

۲ با تقسیم فراوانی هر داده یعنی f به تعداد کل داده‌ها یعنی n، فراوانی نسبی به دست می‌آید. فراوانی نسبی را معمولاً با F نشان می‌دهند که همواره عددی در بازهٔ $[0,1]$ است.

$$F=\frac{f}{n}$$

در یک کلاس با ۲۰ دانش‌آموز اگر رنگ چشم ۱۰ نفر مشکی باشد، فراوانی نسبی کسانی که چشم مشکی دارند برابر $F=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$ است.

۳ اگر فراوانی نسبی داده‌ها را در ۱۰۰ ضرب کنیم، درصد داده‌ها به‌دست می‌آید. درصد داده‌ها را معمولاً با P نشان می‌دهند و همواره داریم:

$$P=F\times 100=\frac{f}{n}\times 100$$

رابطهٔ انواع فراوانی

رابطهٔ درصد داده‌ها با هم	رابطهٔ فراوانی‌های نسبی با هم	رابطهٔ فراوانی‌ها با هم
$\sum P_i=P_1+P_2+\cdots+P_k=100$	$\sum F_i=F_1+F_2+\cdots+F_k=1$	$\sum f_i=f_1+f_2+\cdots+f_k=n$

$P \xrightarrow{\div 100} F \xrightarrow{\times n} f$ ، $f \xrightarrow{\div n} F \xrightarrow{\times 100} P$

فراوانی نسبی داده‌ای ۰/۴ است، اگر بدون تغییر در بقیهٔ داده‌ها فراوانی این داده ۴ برابر شود، فراوانی نسبی آن اکنون کدام است؟

۱) $\frac{8}{11}$ ۲) $\frac{7}{13}$ ۳) $\frac{1}{11}$ ۴) $\frac{8}{13}$

۳ اگر فراوانی این داده را با f و تعداد کل داده‌ها را با n نشان دهیم مقدار f برحسب n معلوم می‌شود:

$$F=\frac{f}{n}\Rightarrow 0/4=\frac{f}{n}\Rightarrow f=0/4n$$

حال اگر فراوانی این داده ۴ برابر شود، فراوانی در حالت جدید $4f$ شده و به تعداد کل داده‌ها نیز $3f$ اضافه می‌شود. در نتیجه:

$$F_{new}=\frac{f_{new}}{n_{new}}=\frac{4f}{n+3f}=\frac{4(0/4n)}{n+3(0/4n)}=\frac{1/6}{2/2}=\frac{16}{22}=\frac{8}{11}$$

جزوه طلایی
خرید آنلاین در gajmarket.com

برای همهٔ انواع متغیّرها (کمّی و کیفی) می‌توان جدول فراوانی به شکل‌های زیر رسم کرد:

جدول فراوانی	جدول فراوانی نسبی	جدول درصد داده‌ها
x_i: x_1 x_2 x_3 $\cdots$ x_k f_i: f_1 f_2 f_3 $\cdots$ f_k	x_i: x_1 x_2 x_3 $\cdots$ x_k F_i: F_1 F_2 F_3 $\cdots$ F_k	x_i: x_1 x_2 x_3 $\cdots$ x_k P_i: P_1 P_2 P_3 $\cdots$ P_k
$\sum f_i = n$	$\sum F_i = 1$	$\sum P_i = 100$

در متغیّرهای تصادفی پیوسته به جای این‌که مقادیر مختلف متغیّر تصادفی به صورت سطری مقابل آن قرار گیرد، به صورت ستونی زیر هم نوشته می‌شود. در این حالت می‌توان انواع فراوانی را به صورت ستونی در یک جدول نوشت. حتی می‌توان یک ستون هم برای شاخص‌های عددی در نظر گرفت که به رسم نمودارها کمک می‌کند.

نام متغیّر تصادفی	شاخص عددی	فراوانی	فراوانی نسبی	درصد داده‌ها
حدود x_1 یا مقدار x_1	۱	f_1	F_1	p_1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
حدود x_n یا مقدار x_n	n	f_n	F_n	P_n

یک جفت تاس را ۵۰ بار پرتاب کرده‌ایم. اگر ۵ بار اعداد ظاهرشده برابر باشد، در چند حالت اختلاف آن‌ها مضرب ۳ است؟

اختلاف اعداد دو تاس	۰	۱	۲	۳	۴	۵
فراوانی نسبی	x	۰/۲	۰/۳	y	۰/۰۸	۰/۱۴

۱) ۱۶ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۲

۳ وقتی گفته می‌شود اعداد ظاهرشده برابرند یعنی اختلاف آن‌ها صفر است بنابراین از روی فراوانی دستهٔ اول مقدار x را می‌توان به دست آورد. چون مجموع فراوانی‌ها برابر ۵۰ است، پس:

$$F_i = \frac{f_i}{n} \Rightarrow x = \frac{5}{50} = 0/1$$

اکنون جمع فراوانی‌های نسبی را «۱» قرار می‌دهیم تا y به دست آید:

$$\sum F_i = 1 \Rightarrow 0/1 + 0/2 + 0/3 + y + 0/08 + 0/14 = 1 \Rightarrow y = 0/18$$

حال جمع فراوانی‌های نسبی حالاتی که اختلاف اعداد رو شده مضرب ۳ (یعنی ۰ یا ۳) است برابر با $\sum F = 0/1 + 0/18 = 0/28$ است که از روی آن مقدار فراوانی قابل محاسبه است:

$$F = \frac{f}{n} \Rightarrow 0/28 = \frac{f}{50} \Rightarrow f = 14$$

جدول زیر مربوط به فراوانی و درصد داده‌های شاخص کیفیت هوای تهران (AQI) در چند روز متوالی در سال ۹۵ است، کدام گزینه درست است؟

وضعیت هوا	شاخص کیفیت	فراوانی	درصد داده‌ها
پاک یا سالم	$0 \le AQI \le 100$	۷	۳۵
ناسالم	$100 < AQI \le 200$	x	y
خطرناک	$200 < AQI \le 300$	۳	z

۱) $z=15, y=40, x=10$
۲) $z=20, y=50, x=12$
۳) $z=15, y=50, x=10$
۴) $z=20, y=40, x=12$

۳ با توجه به مشخص بودن فراوانی و فراوانی نسبی روزهایی که وضعیت هوا «پاک یا سالم» است، تعداد کل روزهای مورد بررسی برابر است با:

$$P_i = \frac{f_i}{n} \times 100 \Rightarrow 35 = \frac{7}{n} \times 100 \Rightarrow n = 20$$

با معلوم شدن n می‌توان x را نیز به دست آورد:

$$7 + x + 3 = 20 \Rightarrow x = 10$$

با مشخص شدن مقدار x، می‌توانیم درصد داده‌های هوای ناسالم یعنی y را محاسبه کنیم:

$$P_i = \frac{f_i}{n} \times 100 = \frac{10}{20} \times 100 = 50 \Rightarrow y = 50$$

از طرفی جمع درصد داده‌ها همیشه ۱۰۰ است. بنابراین مقدار z هم به دست می‌آید:

$$35 + 50 + z = 100 \Rightarrow z = 15$$

بنابراین تنها گزینهٔ ۳ درست است.

جزوه طلایی
خرید آنلاین در gajmarket.com

۱۱۵ تغییر داده‌ها و تأثیر آن بر میانه

اگر همهٔ داده‌ها دچار تغییرات یکسانی شوند، میانه در ۳ حالت زیر برای داده‌های جدید قابل محاسبه است:

۱ اگر عددی به همهٔ داده‌ها اضافه یا از همهٔ داده‌ها کم شود، همان عدد عیناً به میانه اضافه و یا از آن کم خواهد شد.

اگر میانهٔ a,b,c,d,e برابر ۷ باشد، میانهٔ $a-۳, b-۳, \ldots, e-۳$ برابر $۷-۳=۴$ خواهد بود.

۲ اگر عددی در همهٔ داده‌ها ضرب یا همهٔ داده‌ها بر آن تقسیم شود، همان عدد عیناً در میانه ضرب و یا تقسیم خواهد شد.

اگر میانهٔ داده‌های a, b, c, d برابر ۲ باشد، میانهٔ داده‌های $۳a, ۳b, ۳c, ۳d$ برابر $۲\times۳=۶$ خواهد شد.

۳ اگر میانهٔ داده‌های $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ برابر $Q_۲$ باشد، در این صورت میانهٔ داده‌های ax_n+b برابر $aQ_۲+b$ خواهد شد.

اگر میانهٔ داده‌های a, b, c, d برابر ۳ باشد، آنگاه میانهٔ $۲a-۱, ۲b-۱, ۲c-۱, ۲d-۱$ برابر $(۲\times۳)-۱=۵$ خواهد بود.

اگر k دادهٔ کم‌تر از میانه و همان تعداد دادهٔ بزرگ‌تر از میانه به داده‌ها اضافه یا از میان داده‌ها حذف شود، میانه تغییری نمی‌کند.

اگر میانهٔ داده‌های a, b, c, d, e, f برابر ۲۷ باشد، میانهٔ داده‌های $۲a-۱۱, \ldots, ۲e-۱۱, ۲f-۱۱$ کدام است؟

۱) ۴۳ ۲) ۴۲ ۳) ۴۴ ۴) ۴۵

۱ $Q'_۲=۲Q_۲-۱۱=۲\times۲۷-۱۱=۴۳$

۱۱۶ محاسبهٔ چارک‌ها

اگر در داده‌های کوچک‌تر از میانه مجدداً میانه را حساب کنیم، عدد حاصل را چارک اول می‌نامند و با $Q_۱$ نشان می‌دهند. همچنین میانهٔ داده‌های بزرگ‌تر از میانه را چارک سوم می‌نامند و با $Q_۳$ نشان می‌دهند. میانه، خودش چارک دوم محسوب می‌شود.

نیمه اول / نیمه دوم

$۱,۱,۱,۳,۳,۳,\underset{Q_۲=۴}{۴},۵,۷,۱۱,۱۷,۱۷,۱۹$

$Q_۱=\frac{۱+۳}{۲}=۲$ $\quad$ $Q_۳=\frac{۱۱+۱۷}{۲}=۹$

نیمه اول / نیمه دوم

$۲,۳,۳,۴,۴,۴,\underset{Q_۲=۶}{۵},۶,۷,۷,۸,۹,۹,۱۰$

$Q_۱=۴$ $\quad$ $Q_۳=۸$

برای پیدا کردن سریع‌تر چارک اول و سوم، اولین عدد زوج بعد از تعداد داده‌ها را بر ۴ تقسیم می‌کنیم. عدد به دست آمده، جایگاه $Q_۱$ و $Q_۳$ را از ابتدا و انتهای داده‌ها معلوم می‌کند.

اگر تعداد داده‌ها ۱۸ باشد، به عدد $\frac{۲۰}{۴}=۵$ می‌رسیم، یعنی دادهٔ پنجم از ابتدا $Q_۱$ و دادهٔ پنجم از انتها $Q_۳$ است.

اگر تعداد داده‌ها ۱۷ باشد، به عدد $\frac{۱۸}{۴}=۴/۵$ می‌رسیم، یعنی میانگین داده‌های چهارم و پنجم، از ابتدا $Q_۱$ و از انتها $Q_۳$ را به ما می‌دهد.

اگر عدد زوج بعد از n بر ۴ بخش‌پذیر باشد، دو تا از داده‌ها $Q_۱$ و $Q_۳$ هستند ولی اگر این عدد مضرب ۴ نباشد، چارک اول و سوم جزء داده‌ها نیستند و از میانگین دو داده به دست می‌آیند.

نرخ بیکاری یک کشور در ۱۰ سال گذشته به‌صورت زیر است، مقدار $\frac{Q_۱+Q_۳-۲Q_۲}{Q_۳-Q_۱}$ کدام است؟ (داخل - ۹۸)

۱۱/۵	۱۲/۸	۱۳/۵	۱۱/۲	۱۲/۳
۱۰/۶	۱۱/۹	۱۰/۶	۳۰/۲	۱۲/۷

۱) $-۰/۲۲۵$ ۲) $-۰/۱۲۵$ ۳) $۰/۱۷۵$ ۴) $۰/۲۷۵$

۲ داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

نیمهٔ اول داده‌ها / نیمهٔ دوم داده‌ها

$۱۰/۶,۱۰/۶,۱۱/۲,۱۱/۵,\underset{Q_۱=۱۱/۲}{۱۱/۹},\underset{Q_۲=\frac{۱۱/۹+۱۲/۳}{۲}=۱۲/۱}{۱۲/۳},\underset{Q_۳=۱۲/۸}{۱۲/۷},۱۲/۸,۱۳/۵,۳۰/۲$

بنابراین $Q_۲=\frac{۱۱/۹+۱۲/۳}{۲}=۱۲/۱$ و همچنین $Q_۱=۱۱/۲$ و $Q_۳=۱۲/۸$ و در نتیجه خواهیم داشت:

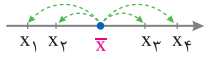
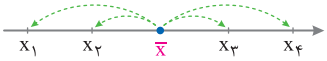
$$\frac{Q_۱+Q_۳-۲Q_۲}{Q_۳-Q_۱}=\frac{(۱۱/۲+۱۲/۸)-۲\times۱۲/۱}{۱۲/۸-۱۱/۲}=\frac{۲۴-۲۴/۲}{۱/۶}=-۰/۱۲۵$$

خرید آنلاین در gajmarket.com

درس سوم معیارهای پراکندگی

ص ۹۳ تا ۱۰۰ کتاب آمار و ...

یکی از شاخص‌های مهم و کارآمد در تشخیص پراکندگی داده‌ها واریانس است. که با نماد σ^2 نشان داده می‌شود. جذر مثبت واریانس را انحراف معیار می‌نامند و با σ نشان می‌دهند. بنابراین واریانس و انحراف معیار همواره اعداد حقیقی نامنفی [بزرگتر مساوی صفر] هستند و نکتهٔ بسیار مهم در مورد این شاخص‌ها این است که هرچه این شاخص‌های پراکندگی کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشند، پراکندگی داده‌ها حول میانگین‌شان کم و در نتیجه داده‌ها به هم نزدیک‌ترند و هر چه این شاخص‌ها بزرگ‌تر و از صفر دورتر باشند، داده‌ها از هم دورترند و پراکندگی بیشتری دارند.

واریانس کوچک‌تر، پراکندگی کم‌تر	واریانس بزرگ‌تر، پراکندگی بیش‌تر
	

اگر چند داده به‌صورت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ داده شده باشد، در این صورت واریانس آن‌ها از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

یعنی برای محاسبهٔ واریانس همواره باید دو مرحلهٔ زیر را مطابق جدول طی کنیم:

روش محاسبهٔ واریانس	واریانس داده‌های ۱,۱,۲,۸ کدام است؟
۱ محاسبهٔ میانگین داده‌ها	$\bar{x} = \frac{1+1+2+8}{4} = 3$
۲ تقسیم مجموع مربعات انحراف از میانگین داده‌ها بر تعداد داده‌ها	$\sigma^2 = \frac{(1-3)^2 + (1-3)^2 + (2-3)^2 + (8-3)^2}{4} = \frac{34}{4} = 8/5$

در داده‌های $1, a, 2, 3, 6$ اگر میانه، میانگین و مُد برابر باشند، واریانس کدام است؟

۱) ۱/۸ ۲) ۲/۲

۳) ۲/۴ ۴) ۲/۸

۴ چون از هرکدام از داده‌ها فقط یکی موجود است، پس برای این که مُد داشته باشیم a باید یکی از همین داده‌ها باشد و خود a هم مُد است، بنابراین:

$$a = \frac{a+1+2+3+6}{5} \Rightarrow 5a = a+12 \Rightarrow 4a = 12 \Rightarrow a = 3$$

بنابراین داده‌ها ۱,۲,۳,۳,۶ هستند و واریانس آن‌ها به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

۱ $\bar{x} = \frac{1+2+3+3+6}{5} = 3$ ⇒ ۲ $\sigma^2 = \frac{(-2)^3 + (-1)^2 + 0 + 0 + 3^2}{5} = \frac{14}{5} = 2/8$

در داده‌های آماری $30, 31, 23, 25, 26, 27, 25, 29, 31, 33$ واریانس داده‌هایی که مقدار آن‌ها بین دو مُد قرار دارند، کدام است؟

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۵

۳) ۲/۸ ۴) ۳/۲

۲ ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$23, 25, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 31, 33$

بنابراین باید واریانس داده‌های قرمز رنگ را پیدا کنیم:

۱ $\bar{x} = \frac{26+27+29+30}{4} = \frac{112}{4} = 28$

۲ $\sigma^2 = \frac{(26-28)^2 + (27-28)^2 + (29-28)^2 + (30-28)^2}{4}$ ⇒ $\sigma^2 = \frac{4+1+1+4}{4} = \frac{10}{4} = 2/5$

جزوه طلایی
خرید آنلاین در gajmarket.com

درس اول گردآوری داده‌ها

ص ۱۰۴ تا ۱۱۷ کتاب آمار و ...

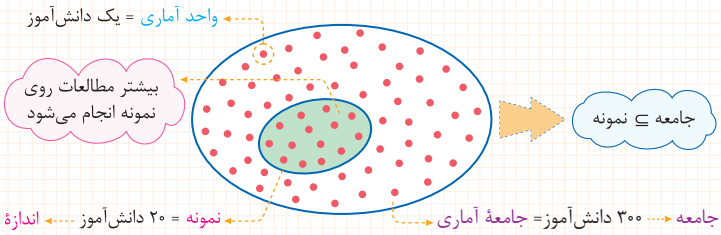
واقعیت‌هایی دربارهٔ یک شیء که در محاسبه، برنامه‌ریزی و پیش‌بینی به کار می‌روند داده نامیده می‌شوند.

مجموعهٔ تمام افراد یا اشیایی که می‌خواهیم دربارهٔ آن‌ها، داده را گردآوری کنیم جامعهٔ آماری و تعداد اعضای آن را، اندازه یا حجم جامعه می‌نامند.

به هر یک از افراد یا اشیای یک جامعهٔ آماری، واحد آماری گفته می‌شود.

هر زیرمجموعه از جامعهٔ آماری که با روش مشخصی انتخاب شده باشد یک نمونه و تعداد اعضای آن را اندازهٔ نمونه یا حجم نمونه می‌نامند.

فرض کنید می‌خواهیم میانگین قد دانش‌آموزان مدرسه‌ای با ۳۰۰ دانش‌آموز را بررسی کنیم چون تعداد دانش‌آموزان مدرسه زیاد است با قرعه‌کشی ۲۰ نفر از ۳۰۰ دانش‌آموز مدرسه را انتخاب می‌کنیم. در این صورت این ۲۰ نفر یک نمونه و ۳۰۰ نفر جامعهٔ آماری و هر نفر یک واحد آماری و عدد قد تک تک دانش‌آموزان معرف داده‌های جامعه و روش مشخص قرعه‌کشی است.



برای مطالعهٔ یک جامعهٔ آماری دو روش عمده وجود دارد:

۱ معمولاً اگر اندازهٔ یک جامعه بزرگ نباشد، می‌توانیم همهٔ واحدهای آماری را مورد بررسی قرار دهیم. این روش را سرشماری می‌نامند.

۲ اگر اندازهٔ یک جامعه بزرگ باشد یا همهٔ اعضای آن در دسترس نباشند یا دسترسی به آن‌ها گران و وقت‌گیر باشد یا این امکان وجود داشته باشد که در اثر مطالعه، نمونه‌ها از بین بروند [مانند بررسی نطفه‌دار بودن تخم‌مرغ یا میزان خاویار در ماهی اوزون برون] به جای سرشماری از نمونه‌گیری استفاده می‌کنیم.

می‌خواهیم وزن ماهی‌های یک حوضچهٔ پرورش ماهی را تخمین بزنیم. به این منظور، ۵ ماهی از میان آن‌ها صید کرده و وزن آن‌ها را اندازه می‌گیریم، در این صورت این ۵ ماهی، معرف یک ----- و هر ماهی درون حوضچه، یک ----- و کل ماهی‌های درون حوضچه، معرف ----- و عدد وزن تک‌تک ماهی‌های درون حوضچه، ----- است.

۱) نمونه - داده - جامعهٔ آماری - متغیّر
۲) واحد آماری - داده - نمونه - داده‌های جامعه
۳) نمونه - واحد آماری - جامعهٔ آماری - داده‌های جامعه
۴) واحد آماری - داده - جامعهٔ آماری - داده‌های جامعه

۳ ۵ ماهی، معرف یک نمونه و هر ماهی درون حوضچه، یک واحد آماری و کل ماهی‌های درون حوضچه، معرف جامعهٔ آماری و عدد وزن تک‌تک ماهی‌های درون حوضچه، داده‌های جامعه است.

چه زمانی از روش نمونه‌گیری به جای سرشماری استفاده می‌گردد؟

۱) جامعه محدود و قابل شمارش باشد.
۲) لیست افراد جامعهٔ آماری موجود نباشد.
۳) جامعهٔ آماری نامحدود و غیر قابل شمارش باشد.
۴) لیست افراد جامعهٔ آماری در درست باشد.

۳ وقتی جامعه نامحدود و غیرقابل شمارش باشد، از روش نمونه‌گیری و هنگامی که جامعه محدود و قابل شمارش باشد، از روش سرشماری استفاده می‌شود اما موجود بودن لیست افراد جامعه یا موجود نبودن آن دلیلی برای استفاده از نمونه‌گیری به جای سرشماری نیست.

می‌خواهیم برخی ویژگی‌های سگ‌های ولگرد تهران را بررسی کنیم در این صورت هر سگ ------- است.

۱) یک نمونه
۲) یک واحد آماری
۳) یک داده
۴) یک آماره

۲ هر سگ یک واحد آماری است.

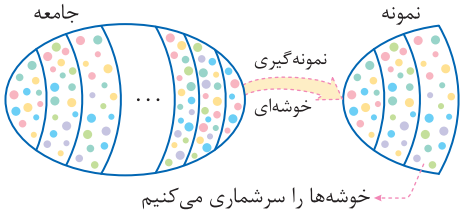
خرید آنلاین در gajmarket.com

اگر جامعهٔ آماری قابل فهرست کردن نباشد، جامعه را به دسته‌ها یا زیرمجموعه‌هایی تقسیم‌بندی می‌کنیم [تعداد اعضای زیرمجموعه‌ها لزوماً برابر نیست.] و هر زیرمجموعه را یک خوشه می‌نامیم. حال چند خوشه را به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده انتخاب می‌کنیم و در هر یک سرشماری انجام می‌دهیم [یعنی همهٔ واحدهای آماری خوشه‌های انتخاب‌شده را به‌عنوان نمونه در نظر می‌گیریم]. این روش نمونه‌گیری را نمونه‌گیری خوشه‌ای می‌نامند.

برای محاسبهٔ میانگین نمرات حسابان دانش‌آموزان شهر تهران، می‌توان چند مدرسه را انتخاب کرد و دانش‌آموزان هر مدرسه را سرشماری کرد [یعنی نمرهٔ حسابان همهٔ دانش‌آموزان درون مدرسه را بررسی کرد] در این حالت هر مدرسه یک خوشه محسوب می‌شود.

۱ در نمونه‌گیری خوشه‌ای، واحدهای آماری درون هر خوشه از نظر مسافت نزدیک به هم هستند.

دانش‌آموزان درون مدرسه از نظر مسافت نزدیک به هم هستند که باعث کاهش هزینه در نمونه گیری خواهد شد.



۲ دقت در نمونه‌گیری خوشه‌ای از دقت در نمونه‌گیری تصادفی ساده، کم‌تر است.

۳ هر چقدر ویژگی‌های مورد بررسی درون خوشه‌ها تفاوت بیشتری داشته باشند، می‌توان گفت خوشه‌ها از تنوعی شبیه تنوع کل جامعه برخوردارند و دقت در نمونه‌گیری خوشه‌ای بهتر خواهد شد.

در نمونه‌گیری خوشه‌ای احتمال انتخاب خوشه‌ها باهم برابر است و چون در همهٔ خوشه‌های انتخاب‌شده سرشماری انجام می‌شود، احتمال انتخاب هر یک از واحدهای آماری نیز با هم برابر بوده و برابر است با:

$$P=\frac{n}{N}=\frac{\text{تعداد خوشه‌های انتخاب شده}}{\text{تعداد کل خوشه‌ها}}$$

در نمونه‌گیری خوشه‌ای

۱) جامعه به زیرمجموعه‌هایی با تعداد عضوهای برابر افراز می‌شود.

۲) احتمال انتخاب خوشه‌ها باهم برابر نیست.

۳) احتمال انتخاب واحدهای آماری با هم برابر نیست.

۴) خوشه‌ها از تنوعی شبیه تنوع کل جامعه برخوردارند.

۴ بررسی گزینه‌ها:

۱ در نمونه‌گیری خوشه‌ای جامعه به زیرمجموعه‌هایی ناتهی افراز می‌شود که لزوماً تعداد عضوهای زیرمجموعه‌ها برابر نیست.

۲ در نمونه‌گیری خوشه‌ای چون خوشه‌ها براساس نمونه‌گیری تصادفی ساده انتخاب می‌شوند، احتمال انتخاب خوشه‌ها باهم برابر است.

۳ در نمونه‌گیری خوشه‌ای چون هر خوشه پس از انتخاب سرشماری می‌شود، احتمال انتخاب تمام واحدهای آماری باهم برابر خواهد شد.

۴ در نمونه‌گیری خوشه‌ای، خوشه‌ها از تنوعی شبیه کل جامعه برخوردارند.

هریک از مدارس A, B, C, D, E, F به ترتیب دارای ۳۰۰، ۲۷۰، ۲۳۰، ۲۰۰، ۱۵۰، ۱۰۰ دانش‌آموز هستند، می‌خواهیم یک نمونه‌گیری خوشه‌ای از میان آن‌ها انجام دهیم. برای این منظور دو مدرسه را به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد دانش‌آموزی از مدرسهٔ A درون نمونهٔ انتخاب شده باشد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$

۳) $\frac{۱}{۱۲۵}$ ۴) $\frac{۲}{۱۲۵}$

۱ می‌دانیم احتمال انتخاب ۲ خوشه از میان ۶ خوشه برابر $\frac{۲}{۶}$ است. حال اگر مدرسهٔ A انتخاب شده باشد، چون در آن سرشماری انجام می‌شود، احتمال آن که دانش‌آموزی از آن مدرسه در نمونه حضور داشته باشد همان $\frac{۲}{۶}$ خواهد بود.

خرید آنلاین در gajmarket.com

اگر بخواهیم در یک نگاه کلی و اجمالی انواع نمونه‌گیری‌های احتمالی را با هم مقایسه کنیم جدول زیر راهگشاست:

نوع نمونه‌گیری	موارد استفاده	مزایا	معایب	ویژگی به‌خصوص	احتمال انتخاب هر واحد آماری
تصادفی ساده	فهرست واحدهای آماری موجود باشد. مانند ثبت‌نام‌کنندگان در آزمون کنکور سراسری	همهٔ واحدهای آماری امکان حضور در نمونه را دارند چون فهرست آن‌ها موجود است.	در جوامع بزرگ، زمان‌بَر و هزینه‌بَردار است، چون دسترسی به فهرست همهٔ واحدهای آماری سخت است.	اگر جامعه از طبقات متمایز تشکیل شده باشد روش مناسبی نیست. چون ممکن است از بعضی طبقات واحد آماری در نمونه موجود نباشد.	$P=\frac{n}{N}$ n = اندازهٔ نمونه N = اندازهٔ جامعه
خوشه‌ای	فهرست واحدهای آماری موجود نیست ولی فهرست گروه‌های تشکیل‌دهندهٔ جامعه موجود است.	ساده‌تر، کم‌هزینه‌تر و سریع‌تر از نمونه‌گیری تصادفی ساده و طبقه‌ای است.	از بعضی خوشه‌ها نماینده‌ای در نمونه وجود ندارد.	واحدهای آماری درون هر خوشه باید از نظر مسافت به هم نزدیک باشد. هرخوشه به تنهایی از تنوعی شبیه کل جامعه، برخوردار است.	$P=\frac{n}{N}$ n = تعداد خوشه‌های انتخاب‌شده N = تعداد کل خوشه‌ها
طبقه‌ای	جامعه از چند گروه با ویژگی‌های متمایز تشکیل شده که افراد هر گروه شبیه هم ولی اختلاف بین گروه‌ها زیاد است.	از تمام طبقات تشکیل‌دهندهٔ جامعه، واحد آماری در نمونه وجود دارد.	از نمونه‌گیری تصادفی ساده و خوشه‌ای دقیق‌تر ولی زمان‌برتر و هزینه‌بردارتر است.	از هر طبقه متناسب با جمعیت آن، واحد آماری انتخاب می‌شود.	$P=\frac{n}{N}$ n = اندازهٔ نمونه N = اندازهٔ جامعه
سیستماتیک	واحدهای آماری به‌طور تصادفی فهرست شده باشند، مانند خط تولید کارخانه، سالن سینما و تئاتر و مسابقات پیامکی	از تمام طبقه‌ها نماینده در نمونه حضور دارد.	تقسیم جامعه به گروه‌ها و دسته‌های مساوی ممکن است هزینه‌بردار و زمان‌بر باشد.	فقط از دستهٔ اول یک واحد آماری به تصادف انتخاب می‌شود. اندازهٔ طبقات با هم برابر است.	$P=\frac{n}{N}$ n = اندازهٔ نمونه N = اندازهٔ جامعه

در کدام نوع نمونه‌گیری، جامعه به چند زیرمجموعه افراز نمی‌شود؟

۱) خوشه‌ای ۲) سیستماتیک

۳) طبقه‌ای ۴) تصادفی ساده

۴ به جز نمونه‌گیری تصادفی ساده، در سایر نمونه‌گیری‌های احتمالی همیشه جامعه را به زیرمجموعه‌هایی (طبقه‌هایی) افراز می‌کنیم اما:

۱ در نمونه‌گیری خوشه‌ای بعضی از خوشه‌ها (زیرمجموعه‌ها) به تصادف انتخاب و سرشماری می‌شوند.

۲ در نمونه‌گیری سیستماتیک هیچ طبقه‌ای به تصادف انتخاب نمی‌شود، بلکه یک نفر از طبقهٔ اول به تصادف انتخاب می‌شود و بقیهٔ افراد طبق رویهٔ به خصوصی انتخاب می‌شوند.

۳ در نمونه‌گیری طبقه‌ای از همهٔ طبقات متناسب با جمعیت آن‌ها واحد آماری به تصادف انتخاب می‌شود.

برای بررسی سن ساکنان یک برج ۴۰ طبقه، ۵ طبقه را به تصادف انتخاب و سن تک‌تک افراد ساکن را بررسی می‌کنیم. این روش نمونه‌گیری چه نام دارد؟

۱) خوشه‌ای ۲) سامان‌مند

۳) تصادفی ساده ۴) طبقه‌ای

۱ درون یک برج طبقه‌ها تنوعی شبیه تنوع کل جامعه دارند، یعنی این‌طور نیست که افراد یک طبقه از نظر سنی شبیه هم باشند که در آن صورت نمونه‌گیری طبقه‌ای مناسب بود. از طرف دیگر چون در هر طبقه سرشماری انجام شده، پس نمونه‌گیری به یقین خوشه‌ای است. می‌دانیم در نمونه‌گیری طبقه‌ای از هر طبقه، متناسب با جمعیت آن واحد آماری به تصادف انتخاب می‌شود.

می‌خواهیم میانگین قد افراد شرکت‌کننده در المپیک را بررسی کنیم. اگر ۲۰۰ نفر از افراد شرکت‌کننده زن و ۸۰۰ نفر آن‌ها مرد باشند و ما بخواهیم یک نمونهٔ ۲۰ نفره انتخاب کنیم، کدام روش نمونه‌گیری مناسب‌تر است؟

۱) خوشه‌ای ۲) تصادفی ساده

۳) طبقه‌ای ۴) سیستماتیک

۳ نمونه‌گیری طبقه‌ای بهتر است چون جامعه از دو طبقهٔ مردان و زنان تشکیل شده که از نظر قد با هم تفاوت دارند، ولی افراد هر گروه از نظر قدی شبیه هم هستند.

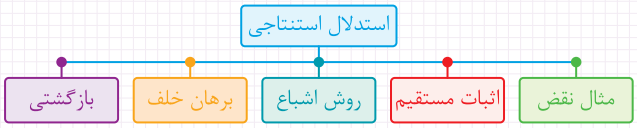
جزوه طلایی

خرید آنلاین در gajmarket.com

درس اول — استدلال ریاضی

ص ۲ تا ۸ کتاب گسسته

درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویّه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. اگر برای اثبات درستی یا نادرستی یک گزاره، از حقایقی استفاده کنیم که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم، از نوعی استدلال به نام استدلال استنتاجی استفاده کرده‌ایم. استدلال استنتاجی دارای انواع و اقسامی است:



برای اثبات درستی یک گزاره به روش اثبات مستقیم، ابتدا باید گزارهٔ داده شده را به زبان ریاضی برگردانیم. جدول زیر برای برگرداندن یک گزاره به زبان ریاضیات کمک مهمی به شما می‌کند:

عبارت فارسی	نماد ریاضی
عدد زوج	$۲k$
عدد فرد	$۲k+۱$
عدد مضرب ۳	$۳k$
عدد مربع کامل	$k^۲$

عبارت فارسی	نماد ریاضی
عدد مکعب کامل	$k^۳$
عدد فرد مربع کامل	$(۲k+۱)^۲$
دو عدد فرد	$۲k+۱, ۲k'+۱$
دو عدد زوج	$۲k, ۲k'$

عبارت فارسی	نماد ریاضی
دو عدد فرد متوالی	$۲k-۱, ۲k+۱$
دو عدد زوج متوالی	$۲k, ۲k+۲$
سه عدد متوالی	$k-۱, k, k+۱$
عدد گویا	$\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq ۰$

به کمک اثبات مستقیم نشان دهید جمع سه عدد طبیعی متوالی مضرب ۳ است.

سه عدد طبیعی متوالی را با n و $n+۱$ و $n+۲$ نشان می‌دهیم، در این صورت داریم:

$$n+(n+۱)+(n+۲)=۳n+۳=۳(n+۱)$$

اگر k حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی باشد، کدام عبارت مربع کامل است؟

۱) $۶k+۱$ ۲) $۸k+۱$ ۳) $۲k+۱$ ۴) $۴k+۱$

۴ عبارت $۴k+۱$ مربع کامل است، زیرا:

$$۴k+۱=۴(n(n+۱))+۱=۴n^۲+۴n+۱=(۲n+۱)^۲$$

کدام گزینه دربارهٔ عبارت $k(k+۱)(k+۲)(k+۳)+۱$ درست است؟

۱) مکعب یک عدد فرد است. ۲) مربع یک عدد زوج است.

۳) مربع یک عدد فرد است. ۴) مکعب یک عدد زوج است.

۳ حاصل ضرب چهار عدد متوالی زوج است و و هنگامی که با عدد ۱ جمع می‌شود فرد خواهد شد، از طرف دیگر داریم:

$$k(k+۱)(k+۲)(k+۳)+۱=(\underbrace{k^۲+۳k}_{x})(\underbrace{k^۲+۳k+۲}_{x})+۱=x(x+۲)+۱=x^۲+۲x+۱=(x+۱)^۲$$

بنابراین این عبارت مربع یک عدد فرد است.

اگر به حاصل‌ضرب دو عدد فرد متوالی یک واحد اضافه کنیم، عدد حاصل:

۱) مضرب ۸ است. ۲) مربع کامل است. ۳) بر ۳ بخش‌پذیر است. ۴) مکعب کامل است.

۲

$$(۲k-۱)(۲k+۱)+۱=۴k^۲-۱+۱=۴k^۲=(۲k)^۲$$

اگر n یک عدد طبیعی باشد عبارت $n^۴+۴$ به‌ازای $n>۱$:

۱) مربع کامل است. ۲) قابل تجزیه به حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی است.

۳) همواره زوج است. ۴) یک عدد اول است.

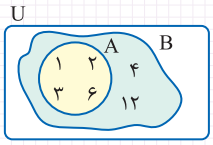
۲ می‌دانیم $a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab$ است، بنابراین:

$$n^۴+۴=(n^۲)^۲+(۲)^۲=(n^۲+۲)^۲-۲(n^۲)(۲)=(n^۲+۲)^۲-(۲n)^۲=(n^۲+۲-۲n)(n^۲+۲+۲n)$$

بنابراین عبارت قابل تجزیه به حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی است.

خرید آنلاین در gajmarket.com

می‌دانیم $۲\times۶=۱۲$ بنابراین می‌توان گفت $۶\mid۱۲$ از طرفی مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های ۶ به‌صورت $A=\{۱,۲,۳,۶\}$ و مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های ۱۲ به‌صورت $B=\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$ است و بدیهی است که $A\subseteq B$ ، بنابراین به‌طور کلی خواهیم داشت:



$$a\mid b \Rightarrow \{\text{مقسوم‌علیه‌های } a\}\subseteq\{\text{مقسوم‌علیه‌های } b\}$$

عکس رابطهٔ فوق نیز درست است یعنی اگر $\{\text{مقسوم‌علیه‌های } a\}\subseteq\{\text{مقسوم‌علیه‌های } b\}$ آنگاه $a\mid b$.

در رابطهٔ بخش‌پذیری $a\mid b$ ، همواره به نوعی مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های a کوچک‌تر یا مساوی مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های b است. بنابراین از این به بعد به‌طور قراردادی در این کتاب سمت چپ رابطه عاد کردن را لاغر و سمت راست را چاق می‌نامیم.

چاق | لاغر
صفر چاق‌ترین عدد است چون بر تمام اعداد بخش‌پذیر است.
±۱ لاغرترین اعداد هستند. چون همه اعداد را می‌شمارند.
هر عددی چاق‌تر یا لاغرتر از خودش محسوب می‌شود چون به‌ازای هر a داریم $a\mid a$.

همواره در یک بخش‌پذیری می‌توان چاق را چاق‌تر و همچنین لاغر را لاغرتر کرد. این قضیه را به‌طور قراردادی در این کتاب قانون لورل ـ هاردی می‌نامیم.

$$a\mid b\Rightarrow \begin{cases} a\mid b \\ a\mid b \end{cases}$$

- $۴\mid۱۲\Rightarrow۴\mid۱۲\times۵$
- $۲\mid۸\Rightarrow۲\mid۸\times(-۳)$
- $۵\mid b\Rightarrow۵\mid۲b$
- $۸\mid۲۴\Rightarrow۴\mid۲۴$
- $-۱۲\mid۳۶\Rightarrow-۴\mid۳۶$
- $۱۰\mid b\Rightarrow۵\mid b$

عوامل چاقی	عوامل لاغری
۱ ضرب شدن در یک عدد صحیح	**۱ تقسیم شدن بر یک عدد صحیح**
• $a\mid b\Rightarrow a\mid۴b$ • $۸\mid b\Rightarrow۸\mid ab$ • $a\mid b\Rightarrow a\mid bc$	• $۲b\mid a\Rightarrow b\mid a$ • $۷b\mid a\Rightarrow۷\mid a$ • $bc\mid a\Rightarrow b\mid a$
۲ افزایش توان	**۲ کاهش توان**
• $a^۲\mid b\Rightarrow a^۲\mid b^۵$ • $a\mid b\Rightarrow a\mid b^۲$ • $۲\mid۶\Rightarrow۲\mid۶^۲$	• $a^۳\mid۳۶\Rightarrow a^۲\mid۳۶$ • $۳^۳\mid a\Rightarrow۳^۲\mid a$ • $a^۲\mid b\Rightarrow a\mid b$
بدیهی است که اگر لاغر، چاق شود یا چاق، لاغر شود نتایج به‌دست آمده الزاماً درست نیست.	

بدیهی است که همزمان که چاق را چاق‌تر می‌کنیم می‌توانیم توأم با آن لاغر را نیز لاغرتر کنیم. در تمام موارد زیر لاغر، لاغرتر و در عین حال چاق، چاق‌تر شده است:

- $a^۲\mid۳b\Rightarrow a\mid۶b$
- $a^۳\mid b^۲\Rightarrow a^۲\mid b^۳$
- $۲a\mid b\Rightarrow a\mid b^۲$
- $a^۲\mid b\Rightarrow a\mid b^۳$

می‌توان طرفین یک بخش‌پذیری را با هم چاق یا با هم لاغر کرد:

$ma\mid mb\Rightarrow a\mid b \quad m\in\mathbb{Z}-\{۰\}$	$a\mid b\Rightarrow ma\mid mb \quad m\in\mathbb{Z}$	$a^n\mid b^n\Rightarrow a\mid b \quad n\in\mathbb{N}$	$a\mid b\Rightarrow a^n\mid b^n \quad n\in\mathbb{N}$
$۲\times۵\mid۶\times۵\Rightarrow۲\mid۶$	$۲\mid۶\Rightarrow۲\times۵\mid۶\times۵$	$۳^۲\mid۶^۲\Rightarrow۲\mid۶$	$۲\mid۶\Rightarrow۳^۲\mid۶^۲$

جمع شدن طرف چاق با یک عدد صحیح موجب چاقی نمی‌شود همان طور که کم شدن یک عدد از طرف لاغر باعث لاغری آن نمی‌شود. در واقع در قضیهٔ لورل ـ هاردی تنها اعمالی که باعث چاقی می‌شود ضرب شدن در عدد صحیح و افزایش توان است و همچنین تنها اعمالی که باعث لاغری می‌شود تقسیم شدن [از دست دادن عامل] و کاهش توان است.

- $۶\mid۱۸\not\Rightarrow۶\mid\underbrace{۱۸+۴}_{۲۲}$
- $۵\mid۱۰\not\Rightarrow۵\mid\underbrace{۱۰-۲}_{۳}$

جزوه طلایی

خرید آنلاین در gajmarket.com

برای پیدا کردن کوچک‌ترین توان a که باقی‌ماندهٔ آن بر m برابر با ۱ باشد، ابتدا کوچک‌ترین توان a را که در حوالی m باشد، پیدا می‌کنیم؛ اگر باقی‌مانده «۱» شد که به نتیجه رسیده‌ایم، اگر «۱-» شد، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم و اگر عددی غیر از ۱ یا ۱- شد با ضرب طرفین هم‌نهشتی در a یا توان‌های a، سعی می‌کنیم طرف دوم را به m نزدیک و سپس ساده کنیم.

فرض کنید می‌خواهیم توانی از ۳ را پیدا کنیم که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۱۱ برابر «۱» باشد

1 کوچک‌ترین توان ۳ را که در حوالی (کمی کمتر یا کمی بیشتر) ۱۱ است در پیمانهٔ ۱۱ کوچک می‌کنیم:	$3^2 \overset{11}{\equiv} -2$
2 چون باقی‌مانده ۱ یا ۱- نشد، طرفین را در توانی از ۳ ضرب می‌کنیم تا طرف دوم به حوالی ۱۱ برسد:	$3^2 \overset{11}{\equiv} -2 \xrightarrow{\times 3} 3^3 \overset{11}{\equiv} -6 \overset{11}{\equiv} 5$
3 مجدداً این کار را ادامه می‌دهیم؛ تا اولین توان از ۳ که در پیمانهٔ ۱۱ برابر ۱ شود، به‌دست آید:	$3^3 \overset{11}{\equiv} 5 \xrightarrow{\times 3} 3^4 \overset{11}{\equiv} 15 \overset{11}{\equiv} 4 \xrightarrow{\times 3} 3^5 \overset{11}{\equiv} 12 \overset{11}{\equiv} 1$

گاهی اوقات می‌توانیم به جای ضرب کردن طرفین هم‌نهشتی، طرفین را به توان برسانیم. به مثال زیر و میان‌بُر آن دقت کنید:

فرض کنید می‌خواهیم کوچک‌ترین توان از ۲ را پیدا کنیم که باقی‌ماندهٔ آن بر ۲۵ برابر «۱» شود

1 کوچک‌ترین توان ۲ را که در حوالی ۲۵ قرار دارد در پیمانه ۲۵ کوچک می‌کنیم:	$2^5 \overset{25}{\equiv} 7$
2 چون باقی‌مانده ۱ یا ۱- نشد، طرفین را در توانی از ۲ ضرب می‌کنیم تا طرف دوم به حوالی ۲۵ برسد:	$2^5 \times 2^2 \overset{25}{\equiv} 7 \times 2^2 \overset{25}{\equiv} 28 \overset{25}{\equiv} 3$
3 مجدداً این کار را ادامه می‌دهیم تا اولین توان از ۲ که در پیمانهٔ ۲۵ برابر ۱ شود به‌دست آید:	$2^7 \times 2^3 \overset{25}{\equiv} \underbrace{3 \times 2^3}_{24} \overset{25}{\equiv} -1 \Rightarrow (2^{10} \overset{25}{\equiv} -1)^2 \Rightarrow 2^{20} \overset{25}{\equiv} 1$

گاهی در فرآیند یافتن کوچک‌ترین توان شاید بتوان میان‌بُرهایی هم زد مثلاً در همین مثال به‌صورت زیر هم می‌شد عمل کرد:

$2^5 \overset{25}{\equiv} 7 \Rightarrow (2^5 \overset{25}{\equiv} 7)^2 \Rightarrow 2^{10} \overset{25}{\equiv} 49 \overset{25}{\equiv} -1 \Rightarrow 2^{20} \overset{25}{\equiv} 1$

برای پیدا کردن باقی‌ماندهٔ تقسیم a^n بر m باید مراحل زیر را طی کنیم:

1 ابتدا توانی از a مانند a^b را پیدا می‌کنیم که باقی‌ماندهٔ آن بر m برابر ۱ شود یعنی: $a^b \overset{m}{\equiv} 1$

2 باقی‌ماندهٔ n را بر b پیدا می‌کنیم [یعنی $n = bq + r$] و n را بر حسب b مرتب می‌کنیم:

3 در انتها a^r را در پیمانهٔ m کوچک می‌کنیم تا به عددی صحیح و کوچک‌تر از m برسیم.

$a^n = a^{bq+r} \overset{m}{\equiv} (a^b)^q \times a^r \overset{m}{\equiv} 1 \times a^r \overset{m}{\equiv} a^r$

فرض کنید می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ 5^{59} را بر ۱۱ پیدا کنیم.

1 ابتدا توانی از ۵ را پیدا می‌کنیم که باقی‌ماندهٔ آن بر ۱۱ برابر ۱ شود:	$5^2 \overset{11}{\equiv} 3 \xrightarrow{\times 5} 5^3 \overset{11}{\equiv} 15 \overset{11}{\equiv} 4 \xrightarrow{\times 5} 5^4 \overset{11}{\equiv} 20 \overset{11}{\equiv} -2 \xrightarrow{\times 5} 5^5 \overset{11}{\equiv} -10 \overset{11}{\equiv} 1$
2 با توجه به این‌که $5^5 \overset{11}{\equiv} 1$ باید باقی‌ماندهٔ ۵۹ را بر ۵ را حساب کنیم:	$59 = 11 \times 5 + 4 \Rightarrow 5^{59} \overset{11}{\equiv} 5^{11 \times 5 + 4} \overset{11}{\equiv} (5^5)^{11} \times 5^4 \overset{11}{\equiv} 1 \times 5^4$
3 باقی‌ماندهٔ 5^4 را بر ۱۱ پیدا می‌کنیم:	$5^4 \overset{11}{\equiv} 5^2 \times 5^2 \overset{11}{\equiv} 3 \times 3 \overset{11}{\equiv} 9$

در محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ a^n بر m پس از پیدا کردن $a^b \overset{m}{\equiv} 1$ گاهی اوقات بعد از این که باقی‌ماندهٔ n را بر b به‌دست می‌آوریم عدد نسبتاً بزرگی حاصل می‌شود. در این موارد بهتر است a^r را به چند قسمت خرد کنیم و باقی‌مانده‌های هر قسمت را جداگانه حساب کرده و در هم ضرب کنیم.

می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ تقسیم 7^{45} بر ۱۳ را به‌دست آوریم.

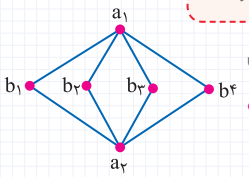
1 ابتدا توانی از ۷ را پیدا می‌کنیم که باقی‌مانده آن بر ۱۳ برابر با ۱ باشد:	$7^2 \overset{13}{\equiv} 10 \xrightarrow{\times 7} 7^3 \overset{13}{\equiv} 70 \overset{13}{\equiv} 5 \Rightarrow 7^6 \overset{13}{\equiv} 25 \overset{13}{\equiv} -1 \Rightarrow 7^{12} \overset{13}{\equiv} 1$
2 با توجه به این‌که $7^{12} \overset{13}{\equiv} 1$ باید باقی‌ماندهٔ تقسیم ۴۵ را بر ۱۲ پیدا می‌کنیم:	$45 = 3 \times 12 + 9 \Rightarrow 7^{45} \overset{13}{\equiv} 7^{3 \times 12 + 9} \overset{13}{\equiv} (7^{12})^3 \times 7^9 \overset{13}{\equiv} 7^9$
3 حال باید 7^9 را در پیمانهٔ ۱۳ ساده کنیم:	$7^9 \overset{13}{\equiv} 7^6 \times 7^3 \overset{13}{\equiv} (-1) \times 5 \overset{13}{\equiv} -5 \overset{13}{\equiv} 8$

جزوه طلایی

خرید آنلاین در gajmarket.com

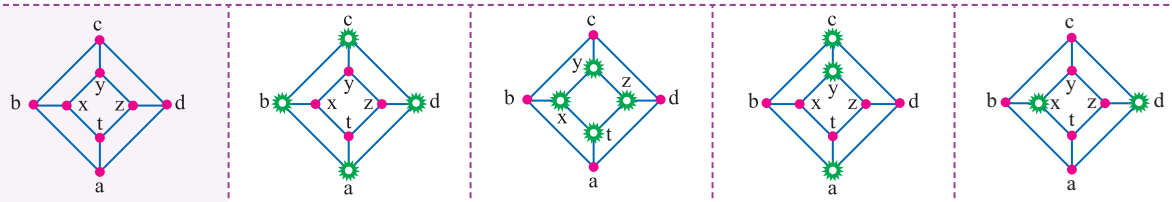
در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه‌های احاطه‌گری را که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم می‌نامند. تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

STOP گاهی اوقات برای راحتی، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم از گراف G را یک γ- مجموعه می‌گویند.



گراف شکل مقابل را در نظر بگیرید. مجموعهٔ $D_1=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر محسوب می‌شود اما این مجموعه، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم نیست. با کمی دقت متوجه می‌شویم که مجموعهٔ $D'_2=\{a_1,a_2\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یا اصطلاحاً یک γ- مجموعه است و در نتیجه $\gamma(G)=2$ است.

گراف G را در نظر بگیرید مجموعه‌های $D_1=\{a,b,c,d\}$ ، $D_2=\{x,y,z,t\}$ ، $D_3=\{c,a,y\}$ هر کدام یک مجموعهٔ احاطه‌گر محسوب می‌شوند. اما مجموعه‌هایی مانند $D_4=\{d,x\}$ یا $D_5=\{c,t\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یا اصطلاحاً یک γ- مجموعه هستند و در نتیجه $\gamma(G)=2$ است.



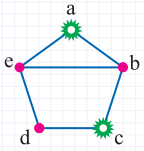
$D_4=\{d,x\}$	$D_3=\{c,a,y\}$	$D_2=\{x,y,z,t\}$	$D_1=\{a,b,c,d\}$	G

اگر G یک گراف p رأسی با ماکزیمم درجهٔ Δ باشد و $\gamma(G)$ عدد احاطه‌گری گراف G باشد، آن‌گاه: $\gamma(G)\geq\left\lceil\frac{p}{\Delta+1}\right\rceil$

STOP عدد احاطه‌گری در بسیاری از گراف‌ها از جمله C_n ، P_n و تمام گراف‌های ۰- منتظم و ۱- منتظم و مکمل تمام این گراف‌ها و همچنین تمام گراف‌های که رأس فول یا نیم‌فول دارند از رابطهٔ $\gamma(G)=\left\lceil\frac{P}{\Delta+1}\right\rceil$ به دست می‌آید.

نماد $\lceil x\rceil$ به معنای سقف عدد x است و نشان‌دهندهٔ کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر و یا مساوی x است. مثلاً: $\lceil 3/2\rceil=4$ ، $\lceil 5\rceil=5$

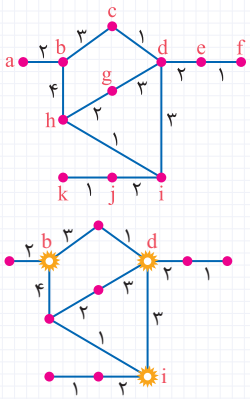
گراف مقابل را در نظر بگیرید. با توجه به قضیه فوق می‌توان گفت که $\gamma(G)\geq\left\lceil\frac{5}{4}\right\rceil=2$. از طرفی به سادگی معلوم است که $D=\{a,c\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است؛ بنابراین عدد احاطه‌گری این گراف دقیقاً ۲ است و نمی‌تواند کمتر از ۲ باشد.



گراف مقابل، گراف نظیر با نقشهٔ یک منطقه شامل چند روستا و جاده‌های بین آن روستاها و مسافت بین آن‌هاست. اگر بخواهیم چند مدرسه در برخی از روستاها احداث کنیم به‌طوری که فاصلهٔ هر روستا از نزدیک‌ترین مدرسه بیش از ۴ کیلومتر نباشد حداقل چند مدرسه باید احداث کرد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

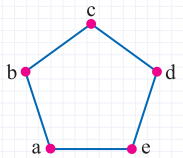
۲ حداقل ۳ مدرسه باید در مناطق i,d,b احداث شود:



گراف مقابل چند γ- مجموعهٔ متمایز فاقد رأس C دارد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۲ در این گراف γ- مجموعه‌های فاقد رأس C عبارتند از:

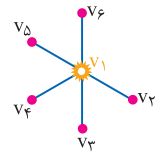


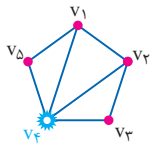
$D_1=\{b,e\}$, $D_2=\{a,d\}$, $D_3=\{b,d\}$

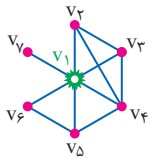
جزوه طلایی
خرید آنلاین در gajmarket.com

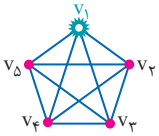
درگراف‌هایی که رأس فول وجوددارد، یعنی $\Delta=p-1$ است، عدد احاطه‌گری برابر با $\gamma(G)=1$ است و آن رأس به تنهایی یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است.

نمونه‌هایی از مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم در گراف‌هایی که رأس فول دارند


$D=\{v_1\}$


$D=\{v_4\}$


$D=\{v_1\}$


$D=\{v_1\}$

بدیهی است که اگر گراف دارای چندین رأس فول باشد، هر کدام از آن رأس‌ها به تنهایی یک مجموعهٔ احاطه‌گر محسوب می‌شوند.

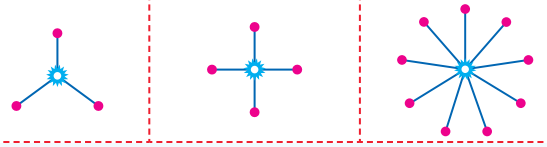
در گراف G از مرتبهٔ ۶ مجموع درجهٔ تمام رئوس برابر ۳۰ است، عدد احاطه‌گری این گراف کدام است؟

مجموع درجهٔ رئوس در هر گراف ساده دو برابر تعداد یال‌هاست بنابراین: $\sum \deg v_i = 2q = 30 \Rightarrow q=15$

حال گرافی با ۶ رأس و ۱۵ یال یک گراف کامل است که همهٔ رأس‌های آن فول است. بنابراین عدد احاطه‌گری آن ۱ است.

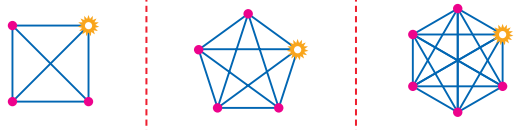
دو نتیجه از قبلی

1. درگراف T_n [درخت ستاره‌ای] عدد احاطه‌گری برابر $\gamma(T_n)=1$ است.



مجموعهٔ احاطه‌گر رأس مرکزی است.

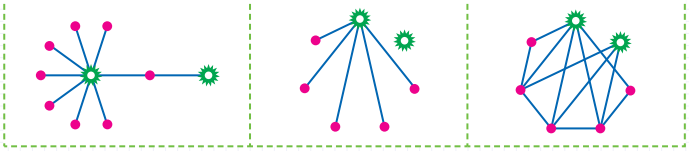
2. درگراف k_n [گراف کامل]، عدد احاطه‌گری برابر $\gamma(k_n)=1$ است.



مجموعهٔ احاطه‌گر هر رأس دلخواه است.

در گراف‌هایی که رأس فول وجود ندارد اما رأس نیمه‌فول وجود دارد. یعنی $\Delta=p-2$ است، عدد احاطه‌گری برابر با $\gamma(G)=2$ است.

نمونه‌هایی از مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم در گراف‌هایی که رأس نیمه فول دارند

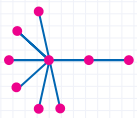


در گرافی با درجهٔ رئوس ۷,۱,۱,۱,۱,۱,۱,۱ عدد احاطه‌گری برابر با ..... است.

۱) ۷
۲) ۱
۳) ۶
۴) ۵

پاسخ: چون گراف یک رأس فول دارد عدد احاطه‌گری آن برابر $\gamma(G)=1$ است.

عدد احاطه‌گری گراف مقابل برابر با ..... است.



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۱
۴) ۴

پاسخ: مرتبهٔ گراف برابر ۹ است و یکی از رأس‌های گراف از درجهٔ ۷ است که نیمه‌فول محسوب می‌شود، بنابراین عدد احاطه‌گری گراف $\gamma(G)=2$ است.

خرید آنلاین در gajmarket.com

1 عدد احاطه‌گری در گراف‌های ۰- منتظم مرتبهٔ n برابر $\gamma(\overline{K_n})=n$ است

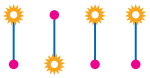
$\gamma(G)=۵$

$\gamma(G)=۴$

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یک مجموعه شامل تمام رأس‌هاست.

2 عدد احاطه‌گری در گراف‌های ۱- منتظم مرتبهٔ n برابر $\gamma(G)=\frac{n}{۲}$ است.

$\gamma(G)=۷$



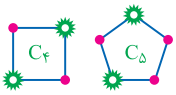
$\gamma(G)=۴$

در مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، از هر دو رأس مجاور، یک رأس حضور دارد

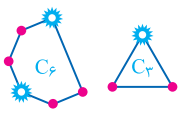
کمترین مقدار برای عدد احاطه‌گری یک گراف ۲-منتظم برابر $\left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$ است و در حالتی به‌دست می‌آید که گراف ۲-منتظم مرتبهٔ n به صورت C_n رسم شود. [البته در برخی از حالت‌های دیگر نیز ممکن است به همین عدد برسیم.] جدول زیر برای گراف ۲- منتظم مرتبهٔ ۹ رسم شده است:

کمترین عدد احاطه‌گری در گراف ۲- منتظم مرتبهٔ ۹

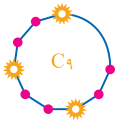
$\gamma(G)=۳$



$\gamma(G)=۴$



$\gamma(G)=۳$

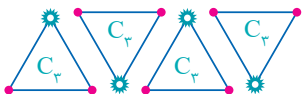


$\gamma(G)=۳$

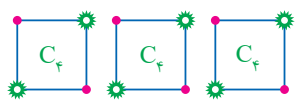
● کمترین مقدار برای عدد احاطه‌گری گراف‌های فوق $\left\lceil \frac{۹}{۳} \right\rceil=۳$ است که در $C_۹$ و همچنین بعضی از شکل‌های دیگر رخ می‌دهد.

بزرگ‌ترین مقدار برای عدد احاطه‌گری یک گراف ۲- منتظم در حالتی به‌دست می‌آید که بخش‌های از گراف به شکل چهار ضلعی یا (یعنی $C_۴$) ترسیم شده باشد. [البته در برخی از حالت‌های دیگر نیز ممکن است به همین عدد برسیم.] جدول زیر برای گراف ۲- منتظم مرتبهٔ ۱۲ رسم شده است:

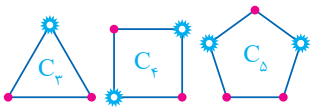
بیش‌ترین عدد احاطه‌گری در گراف ۲- منتظم مرتبهٔ ۱۲



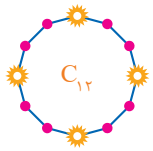
$\gamma(G)=۴$



$\gamma(G)=۶$



$\gamma(G)=۵$



$\gamma(G)=۴$

● بیش‌ترین عدد احاطه‌گری برابر با ۶ است و در حالتی که گراف به شکل چند چهار ضلعی رسم شده است، به دست آمده.

عدد احاطه‌گری در گراف‌های ۳- منتظم و گراف‌های منتظم با درجهٔ رئوس بزرگ‌تر بستگی به شکل گراف دارد و الگوی مشخص و قابل پیش‌بینی ندارد.

عدد احاطه‌گری کدام‌یک از گراف‌های زیر در همهٔ حالات یکسان است؟

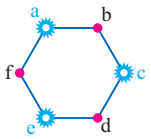
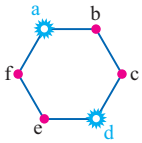
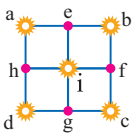
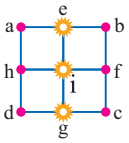
۱) ۲- منتظم مرتبهٔ ۹
۲) ۲- منتظم مرتبهٔ ۱۰
۳) ۲- منتظم مرتبهٔ ۸
۴) ۲- منتظم مرتبهٔ ۱۲

۲ عدد احاطه‌گری گراف ۲- منتظم مرتبهٔ ۱۰ به هر شکلی که رسم شود برابر با ۴ خواهد شد.

جزوه طلایی
خرید آنلاین در gajmarket.com

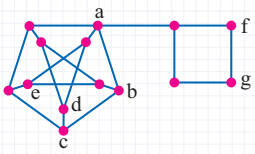
یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش [یعنی هر رأس دلخواه] دیگر احاطه‌گر نباشد، **احاطه‌گر مینیمال** می‌نامیم.

در گراف G_1 مجموعهٔ $D_1=\{a,c,e\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر **مینیمال است** چون با حذف هرکدام از عضوهای a یا c یا e، مجموعهٔ D_1 دیگر احاطه‌گر نخواهد بود. ولی D_1 یک مجموعهٔ احاطه‌گر **مینیمم نیست** امّا مجموعهٔ $D_2=\{a,d\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است که یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال نیز محسوب می‌شود. حال به گراف G_2 نگاه کنید، در این گراف مجموعهٔ $D_1=\{a,b,c,d,i\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر **مینیمال است** اما یک مجموعهٔ احاطه‌گر **مینیمم نیست**. اما مجموعه $D_2=\{e,i,g\}$ یک احاطه‌گر **مینیمم و در عین حال مینیمال** است؛ بنابراین در این گراف $\gamma(G)=3$ است.

G_1		G_2	
			
$D_1=\{a,c,e\}$	$D_2=\{a,d\}$	$D_1=\{a,b,c,d,i\}$	$D_2=\{e,i,g\}$

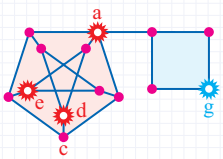
یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال الزاماً یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم نیست اما هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم قطعاً یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال نیز محسوب می‌شود.

کدام مجموعه برای گراف روبه‌رو، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است؟ (داخل - ۹۸)

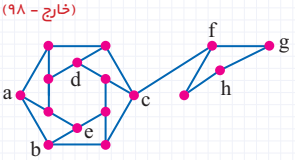


۱) $\{a,c,e,g\}$
۲) $\{a,d,e,g\}$
۳) $\{a,b,d,e\}$
۴) $\{a,d,e,f\}$

۲ این گراف از اتصال گراف پترسن و گراف C_4 به‌دست آمده است و مجموعهٔ $\{a,d,e,g\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است که مینیمال نیز محسوب می‌شود.

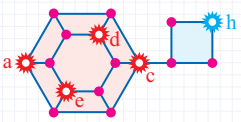


کدام مجموعه، برای گراف روبه‌رو، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است؟ (خارج - ۹۸)



۱) $\{a,b,c,d,h\}$
۲) $\{b,c,e,d,g\}$
۳) $\{a,c,e,d,h\}$
۴) $\{a,c,e,d,g\}$

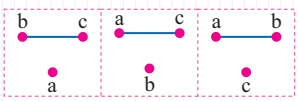
۳ این گراف از اتصال یک گراف همیلتنی نوع دوم و یک گراف C_4 به‌دست آمده است و مجموعهٔ $\{a,c,e,d,h\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است که مینیمال نیز محسوب می‌شود.



چند گراف با رئوس $V=\{a,b,c\}$ وجود دارد که مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال دو عضوی غیریکتا داشته باشد؟

۱) ۶
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

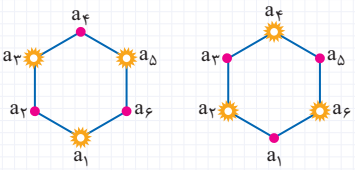
۳ تنها سه گراف مطابق شکل وجود دارد:



گراف C_6 چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال سه عضوی دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) بیش از ۳

۲ این گراف دارای ۲ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال سه عضوی به‌صورت مقابل است:



جزوه طلایی

خرید آنلاین در gajmarket.com

اگر بخواهیم تعداد اعداد n رقمی با ارقام داده شده را پیدا کنیم، n جای خالی در نظر می‌گیریم و خانه‌ها را طبق اصول زیر پُر می‌کنیم.

اصول عدد نویسی

۱ **اگر مسئله محدودیت یا شرطی برای یک خانه قائل شده بود، اول آن را پُر می‌کنیم**

۲ **خانه‌ها معمولاً از سمت چپ به راست پر می‌شوند و اگر تکرار ارقام مجاز نباشد، در هر مرحله یک واحد از تعداد ارقام کم می‌شود.**

۳ **واضح است که رقم سمت چپ هیچ عددی صفر نیست.**

۴ **اگر گفته نشود با چه رقم‌هایی باید عدد بنویسیم، بدیهی است که مجازیم از هر یک از ارقام $\{0,1,2,\dots,9\}$ استفاده کنیم.**

اگر صحبتی در رابطه با مجاز بودن تکرار ارقام نشد، تکرار ارقام مجاز است. البته گاهی با بیان جملات زیر به‌طور غیرمستقیم در مسئله تکرار را غیرمجاز می‌کنند:

- با کنار هم قرار گرفتن ارقام ...
- تعداد جایگشت‌های موجود با ارقام ...
- تعداد اعدادی که هیچ دو رقم آن شبیه هم نیست ...
- با ارقام عددِ ... یک عدد می‌نویسیم ...

در سؤالات ساختن عدد، اگر صحبت از ویژگی‌هایی مانند فرد، زوج و مضرب ۵ و ... به میان آمده بود که برای خانهٔ سمت راست محدودیت ایجاد می‌کند، ابتدا تکلیف آن را مشخص می‌کنیم و سپس طبق روال گذشته به سراغ سایر خانه‌ها می‌رویم.

تعداد اعداد فرد سه رقمی کدام است؟

ابتدا خانهٔ سمت راست را پر می‌کنیم سپس به سراغ اولین خانهٔ سمت چپ می‌رویم:

$\square\times\square\times\boxed{۵}$ ← $\{1,3,5,7,9\}$; Loading Please wait...

$\boxed{۹}\times\boxed{۱۰}\times\boxed{۵}=۴۵۰$; ۹: غیرصفر، ۱۰: آزاد

تعداد اعداد سه رقمی مضرب ۵ با ارقام $\{0,1,2,3,4,5\}$ کدام است؟

ابتدا خانهٔ سمت راست را پر می‌کنیم سپس به سراغ اولین خانهٔ سمت چپ می‌رویم:

$\square\times\square\times\boxed{۲}$ ← $\{0,5\}$; Loading, Please wait...

$\boxed{۵}\times\boxed{۶}\times\boxed{۲}=۶۰$; ۵: غیرصفر، ۶: آزاد

در ساختن تعداد اعداد زوج یا مضرب ۵ بدون تکرار ارقام هنگامی که صفر نیز جزو ارقام داده شده است، مسئله باید به دو قسمت تقسیم شود و جواب‌ها را جمع کنیم، این دو قسمت عبارتند از:

۱ محاسبهٔ تعداد اعدادی که رقم سمت راست آن‌ها صفر است.

۲ محاسبهٔ تعداد اعدادی که رقم سمت راست آن‌ها صفر نیست.

تعداد اعداد سه رقمی مضرب ۵ با ارقام $\{0,1,2,4,5\}$ که ارقام آن متمایز باشند، کدام است؟

$\square\times\square\times\boxed{۱}+\square\times\square\times\boxed{۱}$ ← $\{0\}$; Loading, Please wait... / $\{5\}$; Loading, Please wait...

$\boxed{۴}\times\boxed{۳}\times\boxed{۱}+\boxed{۳}\times\boxed{۳}\times\boxed{۱}$; $\{1,2,4\}$

اگر بخواهیم تعداد اعداد بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از عددی را حساب کنیم، معمولاً روی خانهٔ سمت چپ محدودیت‌هایی به‌وجود می‌آید که باید آن‌ها را لحاظ کنیم. [البته ممکن است ریزه‌کاری‌های دیگری نیز وجود داشته باشد که باید آن‌ها را در هنگام محاسبه در نظر بگیریم.]

تعداد اعداد سه رقمی بزرگ‌تر از ۲۰۱ که با ارقام $\{0,1,2,4,5\}$ می‌توان نوشت کدام است؟

$\boxed{۳}\times\boxed{۵}\times\boxed{۵}-۲=۷۵-۲=۷۳$; $\{2,4,5\}$; اعداد ۲۰۰ و ۲۰۱ را باید کنار بگذاریم.

جزوه طلایی

خرید آنلاین در gajmarket.com

تعداد راه‌های توزیع n شیء کاملاً مشابه در k ظرف متمایز [یا ساختن یک دسته گل شامل n شاخه از k نوع گل متفاوت]

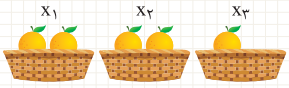
فرض کنیم x_1 شئ در ظرف اول و x_2 شئ در ظرف دوم و ... x_k شئ در ظرف kاُم [یا x_1 شاخه گل از نوع اول و x_2 شاخه گل از نوع دوم و ... x_k شاخه گل از نوع kاُم] باشد، آن‌گاه باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ را پیدا کنیم که برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

STOP این معادله به آمارهٔ اینشتین شهرت دارد و منظور از اعداد صحیح و نامنفی، اعداد صحیح بزرگ‌تر مساوی صفر است.

به چند طریق می‌توان ۵ پرتقال را در ۳ سبد قرار داد؟

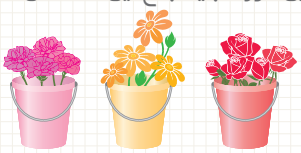
فرض کنیم x_1 پرتقال در سبد اول، x_2 پرتقال در سبد دوم و x_3 پرتقال در سبد سوم قرار گیرد. حال جمع این پرتقال‌ها باید ۵ شود؛ [یکی از حالت‌ها در شکل زیر نمایش داده شده است.] بنابراین داریم:



$x_1+x_2+x_3=5 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $=\binom{5+2}{2}=\binom{7}{2}=\frac{7\times6}{1\times2}=21$

به چند طریق می‌توان یک دسته گل شامل ۶ شاخه از ۳ نوع گل مختلف ساخت؟

فرض کنیم x_1 شاخه از نوع اول، x_2 شاخه از نوع دوم و x_3 شاخه از نوع سوم انتخاب شده باشد. در این‌صورت باید جمع این شاخه‌گل‌ها برابر ۶ باشد بنابراین:



$x_1+x_2+x_3=6 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $=\binom{6+2}{2}=\binom{8}{2}=\frac{8\times7}{1\times2}=28$

به چند طریق می‌توان ۸ کبوتر را در سه لانهٔ متمایز قرار داد؟

فرض کنیم x_1 کبوتر در لانهٔ اول و x_2 کبوتر در لانهٔ دوم x_3 کبوتر در لانهٔ سوم قرار بگیرد، در این صورت خواهیم داشت:

$x_1+x_2+x_3=8 \Rightarrow$ تعداد راه‌ها $=\binom{8+2}{2}=45$

میوه‌ها [سیب، پرتقال، گلابی، موز و ...] و همچنین حیوانات [کبوتر، گنجشک، گاو، گوسفند و ...] و مواردی نظیر آن‌ها را مشابه در نظر می‌گیریم، اما انسان‌ها را همواره متمایز فرض می‌کنیم.

تعداد جواب‌های صحیح و مثبت [جواب‌های طبیعی] معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$

این مسئله معادل با این است که بخواهیم n پرتقال را بین k نفر توزیع کنیم به‌طوری که به هر کدام از افراد حداقل یک پرتقال برسد. برای ساده‌تر شدن حل معادله، ابتدا به هر یک از افراد یک پرتقال می‌دهیم و $n-k$ پرتقال باقی‌مانده را طبق روال قبل بین افراد توزیع می‌کنیم.

به چند طریق می‌توان ۱۰ پرتقال را بین ۴ نفر توزیع کرد به‌طوری که به هریک از افراد حداقل یک پرتقال برسد؟

ابتدا به هریک از افراد یک پرتقال می‌دهیم [که اگر بعداً هیچ پرتقالی به آن‌ها نرسد هیچ مشکلی پیش نیاید]، حال ۶ پرتقال باقی‌مانده را بین افراد توزیع می‌کنیم:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=10-1-1-1-1=6 \Rightarrow \binom{6+3}{3}=\binom{9}{3}=\frac{9\times8\times7}{1\times2\times3}=84$$

به چند طریق می‌توان از میان ۳ نوع گل، یک دسته گل شامل ۷ شاخه ساخت، به‌طوری که از همهٔ گل‌ها در دسته گل استفاده شود؟

ابتدا از هر نوع گل یک شاخه برمی‌داریم، حال باید یه دسته گل شامل ۴ شاخه گل بسازیم:

$$x_1+x_2+x_3=7 \Rightarrow x_1+x_2+x_3=7-1-1-1=4 \Rightarrow \binom{4+2}{2}=15$$

Compote به طورکلی تعداد جواب‌های طبیعی [صحیح و مثبت] معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر است با: $\binom{n-1}{k-1}$

جزوه طلایی
خرید آنلاین در gajmarket.com

کاربرد مربع لاتین در مسائل برنامه‌ریزی است، مثلاً برنامه‌ریزی برای n نفر در n مکان مختلف و n زمان مختلف که هر کدام از افراد درهر مکان و در هر زمان دقیقاً یک‌بار حضور داشته باشند.

اگر بخواهیم برای ۳ مدرس x, y, z در سه کلاس A, B, C در ۳ جلسهٔ اول و دوم و سوم در یک روز هفته برنامه‌ریزی کنیم به‌طوری که هر مدرس در هرکلاس دقیقاً یک بار تدریس کند ۱۲ برنامه‌ریزی مختلف وجود دارد که هرکدام یک مربع لاتین 3×3 هستند، بعضی از این برنامه‌ریزی‌ها به‌صورت زیر است:

	A	B	C
اول	x	y	z
دوم	z	x	y
سوم	y	z	x

∨

	A	B	C
اول	y	z	x
دوم	x	y	z
سوم	z	x	y

∨

	A	B	C
اول	z	y	x
دوم	y	x	z
سوم	x	z	y

∨,...

طبیعی است که اگر مربع برنامه‌ریزی لاتین نباشد، برنامه‌ریزی اشتباه خواهد بود.

به دو مربع زیر نگاه کنید و دلایل اشتباه بودن برنامه‌ریزی برای مدرسین را توضیح دهید.

2

	A	B	C
اول	x	y	x
دوم	y	z	y
سوم	z	x	z

1

	A	B	C
اول	x	y	z
دوم	y	z	x
سوم	x	y	z

در مربع 1 معلم z اصلاً به کلاس A نرفته یا معلم y اصلاً به کلاس C نرفته و در مربع 2 در جلسهٔ اول مدرس x هم‌زمان در کلاس A و C باید حضور داشته باشد و مدرس z نیز در جلسهٔ سوم هم‌زمان باید در دو کلاس A و C حضور داشته باشد.

در یک روز هفته برای ۳ مدرس در ۳ کلاس متمایز در ۳ جلسه متوالی به چند طریق، می‌توان برنامهٔ تدریس تعیین کرد؟ (خارج - ۹۸)

۱) ۶
۲) ۹
۳) ۱۲
۴) ۱۸

۳ برای برنامه‌ریزی نیاز به یک مربع لاتین 3×3 است و از آن‌جا که ۱۲ مربع لاتین 3×3 وجود دارد بنابراین به ۱۲ طریق می‌توان برنامهٔ تدریس برای این ۳ مدرس در ۳ کلاس متمایز در ۳ جلسه متوالی تعیین کرد.

به چند طریق می‌توان در یک روز هفته برای ۳ مدرس x, y, z در سه‌کلاس A, B, C در ۳ جلسه متوالی برنامه‌ریزی کرد به‌طوری‌که مدرس x در جلسهٔ اول در کلاس A تدریس کند؟ (مشابه خارج - ۹۸)

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

۳ اگر یک درایه از یک مربع لاتین 3×3 معلوم باشد، ۴ مربع لاتین قابل تصور است، که در ۲ تای آن‌ها اعداد روی قطر اصلی یکسان است و در ۲ تای دیگر اعداد روی قطر فرعی یکسان است.

به چند طریق می‌توان در یک روز هفته برای ۳ مدرس x, y, z در سه کلاس A, B, C در ۳ جلسه متوالی برنامه‌ریزی کرد به‌طوری که برنامهٔ جلسهٔ اول برای این ۳ مدرس به صورت زیر باشد؟ (مشابه خارج - ۹۸)

	A	B	C
جلسهٔ اول	x	y	z

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲ اگر یک سطر یا یک ستون از مربع لاتین 3×3 معلوم باشد، دو مربع لاتین قابل تصور است، که در یکی از آن‌ها اعداد روی قطر اصلی یکسان است و در دیگری اعداد روی قطر فرعی یکسان است.

به چند طریق می‌توان در یک روز هفته برای ۳ مدرس x, y, z در سه کلاس A, B, C در ۳ جلسه متوالی برنامه‌ریزی کرد به‌طوری که برنامهٔ مدرس x برای کلاس‌های A, B, C معلوم باشد؟ (مشابه خارج - ۹۸)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲ اگر جایگاه یکی از اعداد در مربع لاتین مشخص شده باشد (مثلاً بدانیم «۱» در کدام خانه‌ها قرار گرفته است) دو مربع لاتین 3×3 با این شرایط قابل تصور است.

جزوه طلایی

خرید آنلاین در gajmarket.com

ویژگی‌های مربع‌های لاتین هم‌دسته و غیر هم‌دسته ۳×۳

دستهٔ اول مربع‌های لاتین با درایه‌های قطر اصلی یکسان	دستهٔ دوم مربع‌های لاتین با درایه‌های قطر فرعی یکسان
۱ ۲ ۳ / ۳ ۱ ۲ / ۲ ۳ ۱ ؛ ۱ ۳ ۲ / ۳ ۲ ۱ / ۲ ۱ ۳ ؛ ۲ ۱ ۳ / ۳ ۲ ۱ / ۱ ۳ ۲ ؛ ۲ ۳ ۱ / ۱ ۲ ۳ / ۳ ۱ ۲ ؛ ۳ ۱ ۲ / ۲ ۳ ۱ / ۱ ۲ ۳ ؛ ۳ ۲ ۱ / ۱ ۳ ۲ / ۲ ۱ ۳	۳ ۲ ۱ / ۲ ۱ ۳ / ۱ ۳ ۲ ؛ ۲ ۳ ۱ / ۱ ۲ ۳ / ۳ ۱ ۲ ؛ ۳ ۱ ۲ / ۲ ۳ ۱ / ۱ ۲ ۳ ؛ ۳ ۲ ۱ / ۱ ۳ ۲ / ۲ ۱ ۳ ؛ ۲ ۱ ۳ / ۳ ۲ ۱ / ۱ ۳ ۲ ؛ ۱ ۳ ۲ / ۳ ۱ ۲ / ۲ ۳ ۱ ؛ ۱ ۲ ۳ / ۲ ۳ ۱ / ۳ ۱ ۲
۱ مربع‌های غیر هم‌دسته متعامد هستند.	۲ مربع‌های هم‌دسته باهم متعامد نیستند.
۳ مربع‌های غیر هم‌دسته با جایگشت به یکدیگر قابل تبدیل نیستند.	۴ مربع‌های هم‌دسته از اِعمال جایگشت روی اعضای هم به‌دست می‌آیند.

هر مربع لاتین ۳×۳ با ۶ مربع لاتین دیگر متعامد است، بنابراین ۳۶ جفت مربع لاتین متعامد ۳×۳ مختلف وجود دارد.

قضایای تعامد

۱ اگر A و B دو مربع لاتین متعامد باشند، هر مربعی که با جایگشت روی اعضای B به‌دست آید با مربع A متعامد است.

مربع‌های $A=\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{smallmatrix}$ و $B=\begin{smallmatrix}3&2&1\\2&1&3\\1&3&2\end{smallmatrix}$ متعامدند، بنابراین مربع A با مربع $B_1=\begin{smallmatrix}2&1&3\\3&2&1\\1&3&2\end{smallmatrix}$ نیز متعامد است زیرا مربع B_1 با جایگشت $[۳\to۲,۲\to۱,۱\to۳]$ از روی مربع B به‌دست آمده است.

۲ اگر A یک مربع لاتین $n\times n$ باشد، با اعمال هر جایگشت دلخواه روی اعضای A قطعاً مربع لاتینی غیرمتعامد با A به‌دست می‌آید.

مربع لاتین $A=\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{smallmatrix}$ را در نظر بگیرید. با اعمال جایگشت $[۳\to۱,۲\to۲,۱\to۳]$ به مربع لاتین $A_1=\begin{smallmatrix}3&2&1\\2&1&3\\1&3&2\end{smallmatrix}$ می‌رسیم و معلوم است که A با A_1 متعامد نیست.

۳ اگر A یک مربع لاتین ۳×۳ باشد با تعویض جای دو سطر یا دو ستون از A قطعاً مربعی متعامد با A به‌دست می‌آید و اگر A یک مربع لاتین از مرتبه ۴ یا بیشتر باشد، با تعویض جای دو سطر یا دو ستون از A قطعاً مربعی غیر متعامد با A به‌دست می‌آید.

در مربع لاتین $A=\begin{smallmatrix}3&1&2\\1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}$ با تعویض سطر دوم و سوم به مربع $A_1=\begin{smallmatrix}3&1&2\\2&3&1\\1&2&3\end{smallmatrix}$ می‌رسیم که A و A_1 متعامد هستند.

در مربع لاتین $A=\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{smallmatrix}$ با تعویض سطرهای دوم و سوم به مربع $A_1=\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\\2&3&4&1\\4&1&2&3\end{smallmatrix}$ می‌رسیم که با مربع A **غیرمتعامد** است، زیرا در خانه‌های رنگ‌شده از مربع A رقم ۴ قرار دارد و در همین خانه‌ها از مربع A_1 ارقام متمایز ۱,۲,۳,۴ را مشاهده نمی‌کنیم.

تعداد مربع‌های لاتین متعامد با مربع لاتین مقابل کدام است؟ (داخل - ۹۸)

$\begin{smallmatrix}3&1&2\\1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۴ مربع لاتین داده شده با ۶ مربع لاتین دیگر که اعداد روی قطر اصلی آن‌ها یکسان است، متعامد است.

چند جفت مربع متمایز متعامد به شکل مقابل می‌توان یافت؟

$\begin{smallmatrix}\cdot&\cdot&3\\\cdot&\cdot&\cdot\\3&\cdot&\cdot\end{smallmatrix}$ و $\begin{smallmatrix}3&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&3\end{smallmatrix}$

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۲ می‌دانیم تعداد مربع‌های لاتینی که همه اعداد روی قطر اصلی یا قطر فرعی آن‌ها برابر ۳ باشد، دو تا است. که هر مربع لاتینی که اعداد روی قطر اصلی آن ۳ است، با دو مربع لاتین دیگری که همهٔ اعداد روی قطر فرعی آن برابر ۳ است، متعامد می‌باشد. پس ۴ جفت مربع لاتین با شکل‌های گفته شده وجود دارد.

جزوه طلایی
خرید آنلاین در gajmarket.com