توازن و تناسب در این کتاب

ضریب توازن و تناسب

تعداد سوال موجود در کتاب به ازای هر تست کنکور را ضریب توازن و تناسب آن کتاب می‌نامیم. این توازن در مباحث داخلی کتاب نیز باید رعایت شود. به عبارت دیگر، تعداد سؤال‌های هر مبحث نباید به طور تصادفی کم یا زیاد باشند، بلکه هدفمند و متناسب با بودجه‌بندی همان مبحث تعیین شده باشد.

رعایت این تناسب و توازن، تعداد سؤالات را بهینه و بازده‌ی مطالعاتی شما را به حداکثر خواهد رساند. ضریب توازن از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\text{ضریب توازن و تناسب این کتاب} = \frac{\text{تعداد کل سؤالات این کتاب}}{\text{بودجه‌بندی مباحث این کتاب در کنکور}} = \frac{۱۴۲۲}{۲۴} \simeq ۵۹$$

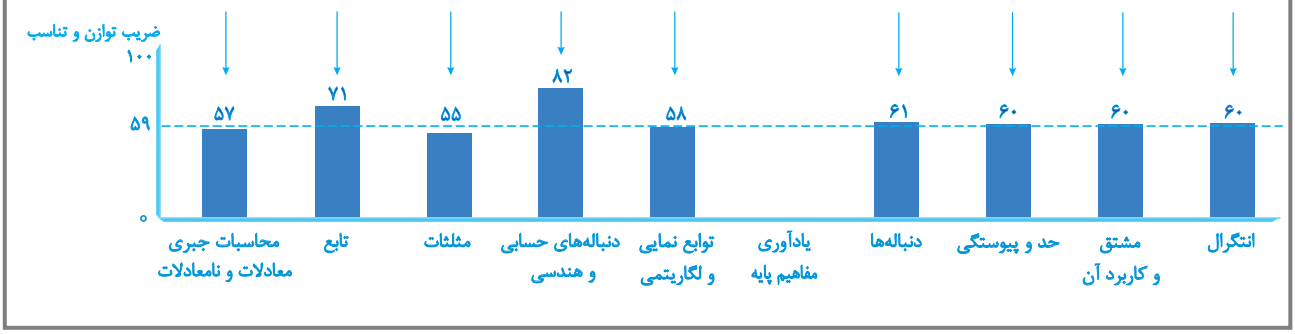
ضریب و نمودار توازن و تناسب در مباحث این کتاب

این کتاب شامل ۱۴۲۲ تست طبقه‌بندی شده است؛ با توجه به این‌که از کتاب‌های درسی ریاضیات ۲، حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال، ۲۴ تست در کنکور ریاضیات رشته‌ی ریاضی مطرح می‌شود، می‌توان گفت به ازای هر سؤال کنکور حدوداً ۵۹ تست در این کتاب موجود است.

رعایت این توازن در مباحث ۱۰ گانه، در نمودار زیر نشان داده شده است. خط‌چین معرف این ضریب توازن (۵۹) است، و عددهای بالای ستون‌ها معرف تعداد سؤال آن مبحث به ازای هر تست کنکور از آن مبحث است (ضریب توازن مبحث)، بنابراین نزدیکی ارتفاع ستون‌ها به این خط‌چین (خط نرمال) نشان‌دهنده رعایت این تناسب و توازن در هر یک از این مباحث است.

نمودار توازن ۱۰ سال کنکور ریاضیات

	انتگرال	مشتق و کاربرد آن	حد و پیوستگی	دنباله‌ها	یادآوری مفاهیم پایه	توابع نمایی و لگاریتمی	دنباله‌های حسابی و هندسی	مثلثات	تابع	محاسبات جبری معادلات و نامعادلات
تعداد سؤالات هر مبحث در این کتاب	۱۲۰	۴۲۴	۲۱۱	۶۱	۲۸	۵۸	۴۱	۱۶۴	۱۴۳	۱۷۲
تعداد سؤالات در کنکور ۵ سال اخیر	۲	۶ - ۹	۲ - ۴	۰ - ۲	۰	۰ - ۱	۰ - ۱	۳	۱ - ۳	۲ - ۴
تعداد سؤالات به ازای هر یک سؤال کنکور	۶۰	۶۰	۶۰	۶۱	۰	۵۸	۸۲	۵۵	۷۱	۵۷



محاسبات جبری،معادلات و نامعادلات

سال برگزاری کنکور	۹۶	۹۵	۹۴	۹۳	۹۲
تعداد سؤال‌های این مبحث در کنکورهای سراسری ۵ سال اخیر	۲	۴	۲	۲	۳

درخت دانش

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: مسلطم.
سبز: نسبتاً مسلطم.
زرد: مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیش‌تر دارید.

محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

۱۷۲ تست شناسنامه‌دار، شامل:
۷۶ تست از کنکورهای سراسری
۴۶ تست منتخب آزمون‌های کانون
از موضوعاتی که تاکنون در کنکورهای سراسری سؤال مطرح نشده یا کمتر مطرح شده است.
۲۸ تست از تمرین‌های کتاب درسی که قابلیت تبدیل به تست چهارگزینه‌ای و مطرح شدن در کنکورها را دارند.
۱۷ تست تالیفی از محتوای کتاب درسی جهت پوشش کامل مطالب
۵ تست از دانشگاه آزاد که ایده‌های مناسب و خاص دارند.

	تعداد تیپ
۱. تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری (۱۷ تست)	
تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای	۵
ب.م.م و ک.م.م چندجمله‌ای‌ها	۱
۲. بسط دوجمله‌ای و مثلث خیام – پاسکال (۱۳ تست)	۵
۳. عبارات درجه‌ی دوم (۴۶ تست)	
معادله‌ی درجه‌ی دوم	۳
تابع درجه‌ی دوم	۳
تعیین علامت و حل نامعادله‌ی درجه‌ی دوم	۱
۴. معادلات و نامعادلات چندجمله‌ای (۱۱ تست)	
معادلات چندجمله‌ای	۲
نامعادلات چندجمله‌ای	۱
۵. معادلات و نامعادلات گویا (۱۱ تست)	
معادلات گویا	۳
نامعادلات گویا	۱
۶. عبارات گنگ، معادلات و نامعادلات (۱۸ تست)	
ریشه‌گیری و توان‌رسانی با توان گویا و حقیقی	۱
معادلات و نامعادلات گنگ	٤
۷. قدر مطلق (۳۳ تست)	
قدر مطلق و ویژگی‌های آن	۱
نمودار توابع قدرمطلقی	۱
معادلات و نامعادلات قدر مطلقی	٤
۸. جزء صحیح (۱۲ تست)	
تعریف جزء صحیح و ویژگی‌های آن	۱
نمودار توابع شامل جزء صحیح	۱
معادلات و نامعادلات شامل جزء صحیح	۱
دوره‌ی تناوب توابع شامل جزء صحیح	–
۹. حل معادلات و نامعادلات به روش هندسی (۱۱ تست)	
حل معادلات به روش هندسی	۱
حل نامعادلات به روش هندسی	۱

مؤلف درسنامه، تیپ‌بندی و تنظیم تست‌های این فصل: فرهاد حامی

۱. تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری

◆ تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای و تعیین خارج قسمت ◆

تعریف رابطه‌ی تقسیم: اگر چندجمله‌ای $P(x)$ از درجه‌ی n را بر چندجمله‌ای $D(x)$ (مخالف صفر) از درجه‌ی m $(n>m)$ تقسیم کنیم، دو چندجمله‌ای $Q(x)$ و $R(x)$ وجود دارند که، داشته باشیم: $P(x)=D(x).Q(x)+R(x)$

$P(x)$ را مقسوم، $D(x)$ را مقسوم علیه، $Q(x)$ از درجه‌ی $n-m$ را خارج قسمت و $R(x)$ را که درجه‌ی آن از درجه‌ی مقسوم علیه کم‌تر است، باقی‌مانده‌ی تقسیم می‌نامیم.

به عنوان مثال هرگاه چندجمله‌ای $P(x)$، از درجه‌ی ۴ را بر چندجمله‌ای $D(x)$، از درجه‌ی ۲ تقسیم کنیم، خارج قسمت، یک چندجمله‌ای از درجه‌ی ۲، یعنی $Q(x)=ax^2+bx+c$ خواهد بود و باقی‌مانده، یک دوجمله‌ای حداکثر از درجه‌ی ۱، یعنی $R(x)=mx+n$ می‌تواند باشد و رابطه‌ی تقسیم به صورت زیر نوشته می‌شود: $P(x)=D(x).(ax^2+bx+c)+mx+n$

۱ تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x-a$: اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x-a$، برابر است با $R=P(a)$.

زیرا با استفاده از قاعده‌ی تقسیم $P(x)=(x-a)Q(x)+R$، اگر در این رابطه به‌جای x، a قرار دهیم $P(a)=(a-a)Q(a)+R$، آنگاه $P(a)=R$.

■ مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $3x^4-5x^2+2x-1$ بر $x+1$ را بیابید.

◀ حل: کافی است $P(-1)$ را بیابیم: $P(-1)=3(-1)^4-5(-1)^2+2(-1)-1=-5 \Rightarrow R=-5$

➢ نتیجه‌ی (۱): برای تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $ax+b$، کافی است $P\left(\frac{-b}{a}\right)$ را تشکیل دهیم.

➢ نتیجه‌ی (۲): هرگاه باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ صفر باشد، آن‌گاه $P(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است، در این حالت $x-a$ را یک عامل یا فاکتور $P(x)$ می‌نامیم و a یک ریشه‌ی معادله‌ی $P(x)=0$ خواهد بود.

به عنوان مثال $(x-1)$ یک عامل چندجمله‌ای $2x^3-5x^2+x+2=0$ و $x=1$، یک ریشه‌ی معادله‌ی $2x^3-5x^2+x+2=0$ است.

۲ بخش‌پذیری $f(x)$ بر $(x-a)^n$, $n\in N$: اگر چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه $f(x)$ و مشتقات متوالی آن تا مرتبه‌ی $(n-1)$ام بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

۳ بخش‌پذیری چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $P(x)$: به‌طور کلی چندجمله‌ای $f(x)$، بر چندجمله‌ای $P(x)$ بخش‌پذیر است، هرگاه: $f(x)=P(x).Q(x)$

در این صورت $Q(x)$ و $P(x)$، عامل‌های $f(x)$ نامیده می‌شوند.

۴ تعیین باقیمانده‌ی چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $P(x)$: به‌طور کلی برای تعیین باقیمانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$، بر چندجمله‌ای $P(x)$، ابتدا $P(x)$ را برابر صفر قرار داده و جمله با بزرگترین درجه‌ی آن را برحسب جملات با درجات پایین‌تر یافته و سپس در $f(x)$ جایگزین می‌کنیم تا زمانی که درجه‌ی باقیمانده از درجه‌ی مقسوم علیه کمتر گردد.

◆ ب.م.م و ک.م.م چندجمله‌ای‌ها ◆

تعیین ب.م.م و ک.م.م دو عدد: ابتدا هر یک از دو عدد a و b را به عامل‌های اول تجزیه کرده و آن‌ها را به‌صورت حاصل‌ضرب عامل های اول توان‌دار می‌نویسیم، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک آن‌ها، از ضرب عامل‌های مشترک دو عدد با کوچک‌ترین نما در هم به‌دست می‌آید، این عدد بزرگترین عددی است که هر دو عدد a و b بر آن بخش‌پذیرند، ب.م.م دو عدد را با نماد (a,b) نمایش می‌دهیم. کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b، از ضرب عامل‌های مشترک و غیر مشترک، با بزرگ‌ترین نما در هم حاصل می‌شود، این عدد، کوچکترین عددی است که بر هر دو عدد بخش‌پذیر است، ک.م.م دو عدد را با نماد $[a,b]$ نمایش می‌دهیم.

ب.م.م و ک.م.م چندجمله‌ای‌ها: در چندجمله‌ای‌ها، ابتدا با استفاده از فاکتورگیری، دسته‌بندی مناسب یا اتحادها، عبارت را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم، سپس همانند روش یافتن ب.م.م و ک.م.م اعداد، ب.م.م و ک.م.م آن‌ها را تعیین می‌کنیم.

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

باقی‌مانده تقسیم و بخش‌پذیری $P(x)$ بر $x-a$ | تیپ ۱ | حسابان: صفحه‌های ۶ تا ۸

۱- عبارت $x^4+4ax^2+2bx+1$ بر x^2-4 بخش‌پذیر است. $a+b$ کدام است؟ (حسابان – صفحه‌ی ۱۰ – مشابه مسأله‌ی ۴) و (سراسری ریاضی – ۸۶)

۱) $-\frac{15}{8}$ ۲) $-\frac{17}{16}$ ۳) $\frac{17}{16}$ ۴) $\frac{15}{8}$

۲- به ازای مقداری از a، چند جمله‌ای $f(x)=x^4+ax^3-8x$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است. کوچکترین ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ کدام است؟ (سراسری ریاضی – ۹۴)

۱) $1-\sqrt{3}$ ۲) $1-\sqrt{5}$ ۳) $-1-\sqrt{3}$ ۴) $-1-\sqrt{5}$

بخش‌پذیری $P(x)$ بر $(x-a)^n$ | تیپ ۲ | حسابان: صفحه‌های ۶ تا ۱۰

۳- اگر عبارت x^4+ax^2-bx+4 بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر باشد، b کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۴)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴- اگر عبارت $ax^3+4x^2-14x+10-a$ بر سه جمله‌ای x^2-2x+1، بخش‌پذیر باشد، a کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

استفاده از رابطه‌ی تقسیم در تعیین باقیمانده | تیپ ۳ | حسابان: صفحه‌های ۶ تا ۱۰

۵- اگر عبارت $x^{2n+1}+2x^{2n}+x^5-5x^3+k$، به ازای هر عدد طبیعی n بر دو جمله‌ای $x+2$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه باقیمانده‌ی تقسیم آن بر x^2-1 کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۹)

۱) $-3x-6$ ۲) $-2x+1$ ۳) $2x+4$ ۴) $3x-4$

آزمون‌های کانون و سایر منابع

استفاده از دسته‌بندی مناسب در تعیین باقیمانده | تیپ ۴ | حسابان: صفحه‌های ۶ تا ۱۰

۶- اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر x^2-x برابر $x+1$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $xf(x)$ بر x^2-x کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی- ۸۸)

۱) $2x$ ۲) x ۳) $x+1$ ۴) $3x$

تعیین خارج قسمت تقسیم | تیپ ۵ | حسابان: صفحه‌های ۶ تا ۱۰

۷- ضریب جمله‌ی فاقد x در خارج‌قسمت تقسیم $3x^3-10x^2$ بر $3x-1$ کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی- ۸۷)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۸- در تقسیم $x^{15}+x^3+2x-11$ بر $x+1$، مجموع ضرایب خارج قسمت تقسیم کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی- ۸۸)

۱) ۴ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

۹- اگر مجموع ضرایب خارج قسمت تقسیم چند جمله‌ای $5x^4-3x^2+ax-1$ بر $x+1$ برابر با ۷ باشد، a کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی- ۳ آذر ۹۳)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۰- مجموع ضرایب خارج قسمت تقسیم $x^{15}+x^3+2x-11$ بر $x-1$، برابر کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی- ۸۹)

۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

تعیین ب.م.م و ک.م.م دو چندجمله‌ای | تیپ ۶ | حسابان: صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴

۱۱- می‌خواهیم ۷۲ لیتر آب میوه، ۴۰ لیتر شیر و ۴۸ لیتر دوغ در شیشه‌هایی با حجم یکسان بسته‌بندی کنیم، چنانچه گنجایش شیشه‌ها برحسب لیتر عددی طبیعی باشد، حداقل تعداد شیشه کدام است؟ (همه‌ی شیشه‌ها کاملاً پر می‌شوند.) (حسابان- صفحه‌ی ۱۵- مسأله‌ی ۳)

۱) ۱۸ ۲) ۱۶ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

۱۲- در یک کیسه بین ۸۰۰ تا ۹۰۰ مهره وجود دارد. اگر آنها را پنج تا پنج تا، هفت تا هفت تا، سه تا سه تا و بالاخره چهار تا چهار تا بشماریم، همواره دو مهره باقی می‌ماند، تعداد مهره‌ها چندتاست؟ (آزمون کانون ریاضی- ۹۱)

۱) ۸۰۷ ۲) ۸۴۲ ۳) ۸۵۶ ۴) ۸۹۵

۱۳- سه زنگ در یک کارخانه برای موارد مختلفی وجود دارد. اولین زنگ در هر ۱۸ دقیقه، دومین زنگ در هر ۲۴ دقیقه و سومین زنگ در هر ۳۲ دقیقه زنگ می‌زنند، بعد از اولین بار که با هم زنگ می‌زنند، حداقل چند دقیقه می‌گذرد تا آن‌ها دوباره با هم زنگ بزنند؟ (حسابان- صفحه‌ی ۱۵- مسأله‌ی ۱)

۱) ۲۴۲ ۲) ۲۵۲ ۳) ۲۸۸ ۴) ۳۱۲

۱۴- اگر باقیمانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=x^3+ax^2+x+b$ بر $x-1$ برابر ۴ باشد و بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد، $\frac{a}{b}$ کدام است؟ (حسابان- صفحه‌ی ۱۰- مسأله‌ی ۳)

۱) -4 ۲) ۴ ۳) $\frac{-1}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۵- اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای و نمودار تابع $y=x+f(x)$ محور xها را در نقاط $x=1$ و $x=2$ قطع کند، باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر x^2-3x+2 کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی- ۹۱)

۱) x ۲) $-x$ ۳) $x+1$ ۴) $1-x$

۱۶- هرگاه سه جمله‌ای x^2+px-1 بر $x-\alpha$ و $x-\beta$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه مقدار $4\alpha\beta+(\alpha-\beta)^2$ برابر کدام است؟ (حسابان- فصل ۱- صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) p^2 ۴) $-p^2$

۱۷- اگر $ax+b$، یک مقسوم‌علیه مشترک دو عبارت x^3+cx^2+2 و $9x^2-6x+1$ باشد، c کدام است؟ (حسابان- فصل ۱- صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵)

۱) ۲ ۲) $-\frac{55}{3}$ ۳) $-\frac{5}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۲. بسط دوجمله‌ای و مثلث خیام – پاسکال

◆ بسط دوجمله‌ای ◆

بسط دوجمله‌ای با توان طبیعی n را به صورت‌های زیر نمایش می‌دهیم:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n \quad (1)$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n \quad ,k,n \in N ,a,b \in R \quad (2)$$

جمله‌ی اول — جمله‌ی دوم — جمله‌ی $(k+1)$ام — جمله‌ی $(n+1)$ام

به عنوان مثال: $(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5$

۱ خواص بسط دوجمله‌ای:

الف- بسط آن $(n+1)$ جمله دارد، که اولین جمله‌ی آن a^n و آخرین جمله‌ی آن b^n است. توان a یک واحد یک واحد، کاهش و توان b یک واحد یک واحد، افزایش می‌یابند. به عنوان مثال $(a+b)^5$ دارای ۶ جمله است.

➢ نتیجه‌ی (۱): بسط‌های $(a+b)^n$ و $(a-b)^n$ هر یک، دارای $(n+1)$ جمله هستند، که جملات ردیف زوج آن‌ها قرینه‌ی یکدیگرند.

به عنوان مثال در بسط چندجمله‌ای $(a-2)^7 + (a+2)^7$، جملات ردیف زوج دو چندجمله‌ای قرینه‌اند، بنابراین چندجمله‌ای، ۴ جمله خواهد داشت.

ب- مجموع توان‌های a و b در بسط $(a+b)^n$ در هر جمله، برابر n است.

ج- در بسط $(a+b)^n$، ضرایب جملات با فاصله‌ی مساوی از طرفین برابر است. یعنی $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$ و $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$ و $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$ و ... در حالت کلی $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

د- برای تعیین مجموع ضرایب بسط $(a+b)^n$، کافی است به جای حروف a و b عدد ۱ را قرار دهیم. بنابراین در رابطه‌ی (۲) خواهیم داشت:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

➢ نتیجه‌ی (۲): با توجه به (ج)، در بسط $(a+b)^n$، مجموع ضرایب جملات با ردیف زوج و مجموع ضرایب جملات با ردیف فرد برابر 2^{n-1} هستند.

۲ جمله‌ی عمومی بسط دوجمله‌ای: جمله‌ی $(k+1)$ام بسط $(a+b)^n$، برابر است با:

$$\text{جمله‌ی } (k+1)\text{ام} = \binom{n}{k}.a^{n-k}.b^k$$

به عنوان مثال در بسط $(a+b)^8$ ، جمله‌ی پنجم برابر $\binom{8}{4}a^4b^4$ است.

■ مثال: در بسط $(a-2x)^7$، ضریب x^4 را بیابید.(a مقداری ثابت است.)

◀ حل: جمله‌ی $(k+1)$ام را می‌نویسیم و توان x در آن را برابر ۴ قرار می‌دهیم:

$$\text{جمله‌ی } (k+1)\text{ام} = \binom{7}{k}.a^{7-k}.(-2x)^k \Rightarrow k = 4$$

و از آنجا، ضریب جمله‌ی پنجم را می‌یابیم:

$$\text{ضریب جمله‌ی ۵ام} = \binom{7}{4}.a^3.(-2)^4 = 560\,a^3$$

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

جمله‌ی عمومی بسط دوجمله‌ای | تیپ ۷ | حسابان: صفحه‌های ۸ تا ۱۰

۱۸- در بسط عبارت $\left(1-\frac{x}{2}\right)^8$، ضریب جمله‌ی شامل x^3 کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – ۸۷)

۱) -7 ۲) -6 ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) -3

۱۹- اگر n یک عدد طبیعی باشد و $(\sqrt{۲}+۱)^{۲n}=۹۹+b\sqrt{۲}$، آیا نتیجه می‌شود که $(۳-۲\sqrt{۲})^{n}=۹۹-b\sqrt{۲}$، در صورت نتیجه‌گیری، عدد b کدام است؟ (سراسری ریاضی – ۹۱)

۱) نتیجه نمی‌شود. ۲) ۷۰ ۳) ۷۲ ۴) ۷۴

جمله‌ی فاقد x بسط دوجمله‌ای | تیپ ۸ | حسابان: صفحه‌های ۸ تا ۱۰

۲۰- ضریب جمله‌ی مستقل از x در بسط $\left(x^{۲}+\frac{۲}{x}\right)^{۶}$ کدام است؟ (سراسری تجربی – ۸۴)

۱) ۲۳۰ ۲) ۲۳۴ ۳) ۲۳۸ ۴) ۲۴۰

آزمون‌های کانون و سایر منابع

ضرایب و رابطه‌ی بین آن‌ها دربسط دوجمله‌ای | تیپ ۹ | حسابان: صفحه‌های ۸ تا ۱۰

۲۱- حاصل $\binom{۷}{۶}+\binom{۷}{۴}+\binom{۷}{۲}+\binom{۷}{۰}$ برابر است با: (حسابان – فصل ۱ – صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

۱) ۱۲۸ ۲) ۶۴ ۳) ۳۲ ۴) ۱۶

تعیین تعداد جمله‌های بسط دوجمله‌ای | تیپ ۱۰ | حسابان: صفحه‌های ۸ تا ۱۰

۲۲- بسط $(x+۳)^{۷}+(۲x+۱)^{۵}$، چند جمله دارد؟ (آزاد غیرپزشکی – ۸۷)

۱) ۸ جمله ۲) ۱۲ جمله ۳) ۷ جمله ۴) ۹ جمله

تعیین تعداد جمله‌های گویای بسط دوجمله‌ای | تیپ ۱۱ | حسابان: صفحه‌های ۸ تا ۱۰

۲۳- چه تعداد از جملات بسط $\left(۲\sqrt[۴]{x}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}\right)^{۱۶}$ گویاست؟ (آزمون کانون ریاضی – ۹۲)

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۴- بسط $(\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۶]{۳})^{۶۴}$ شامل چند جمله‌ی گویاست؟ (حسابان – فصل ۱ – صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) هیچ

۲۵- در تساوی $(۱+\sqrt{۲})^{۵}=۴۱+a\sqrt{۲}$، a کدام است؟ (حسابان – فصل ۱ – صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

۱) ۲۹ ۲) ۲۷ ۳) ۲۳ ۴) ۲۱

۲۶- در بسط $(a+b)^{n}$ ضریب جمله‌های سوم و چهارم برابر است. n کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی – ۹۱)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۵

۲۷- اگر جمله‌ی چهارم بسط $\left(\sqrt[۳]{x}+\frac{۱}{x^{۲}}\right)^{n}$ به صورت $\binom{n}{۳}x^{۵}$ باشد، n کدام است؟ (حسابان – فصل ۱ – صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

۱) ۳۳ ۲) ۳۴ ۳) ۳۵ ۴) ۳۶

۲۸- ضریب $\frac{۱}{x}$ در عبارت $(۱+\frac{۱}{x})^{۴}(۱+x)^{۴}$ برابر است با: (حسابان – فصل ۱ – صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

۱) ۵۶ ۲) ۳۲ ۳) ۴۸ ۴) ۶۸

۲۹- اگر ضرایب جمله‌ی وسط در بسط‌های دوجمله‌ای‌های $(۱+\alpha x)^{۴}$ و $(۱-\alpha x)^{۶}$ با هم برابر باشند $(\alpha\neq ۰\ ,\ \alpha\in R)$، آنگاه α کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی – ۸۹)

۱) $\frac{-۵}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{-۳}{۱۰}$ ۴) $\frac{۱۰}{۳}$

۳۰- ضریب جمله‌ی $x^{۵}$ در بسط $(\sqrt{x}+۱)^{۷}(\sqrt{x}+x)^{۴}$ کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی – ۹۱)

۱) $\binom{۱۱}{۵}$ ۲) $\binom{۱۱}{۲}$ ۳) $\binom{۱۱}{۳}$ ۴) $\binom{۱۱}{۴}$

۳. عبارات درجه‌ی دوم — معادله‌ی درجه‌ی دوم

◆ حل معادله‌ی درجه‌ی دوم ◆

فرمول کلی حل معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ به‌صورت روبه‌روست: $x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

که در آن $\Delta=b^2-4ac$، مبین (دلتای) معادله نامیده می‌شود. اگر $\Delta\geq 0$، معادله ریشه‌ی حقیقی دارد و اگر $\Delta<0$ باشد معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

◆ تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم و روابط بین ریشه‌ها ◆

۱ تشکیل معادله با استفاده از S و P: اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند، آن‌گاه:

$P=x'x''=\frac{c}{a}$ (حاصلضرب ریشه‌ها) $\quad S=x'+x''=\frac{-b}{a}$ (مجموع ریشه‌ها)

و معادله به شکل $x^2-Sx+P=0$ تبدیل خواهد شد. از طرفی با توجه به ریشه‌های معادله، به رابطه‌ی $|x'-x''|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$، خواهیم رسید.

■ مثال: معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش ۹ و ۵ باشد.

◀ حل: از آن‌جایی که $S=5+9=14$ و $P=5\times 9=45$ پس معادله به شکل $x^2-14x+45=0$ خواهد بود.

۲ محاسبه‌ی مقادیر بر حسب ریشه‌ها: با استفاده از اتحادهای جبری و محاسبه‌ی S و P، می‌توانیم بدون محاسبه‌ی ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم، مقادیر مختلفی را برحسب ریشه‌ها بیابیم، به چند اتحاد زیر توجه کنید (فرض کنید α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$، هستند).

(۱) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\Rightarrow \alpha^2+\beta^2=S^2-2P$

(۲) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)\Rightarrow \alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$

(۳) $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2=a+b\pm 2\sqrt{ab}\Rightarrow(\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta})^2=S\pm 2\sqrt{P}$ ، $a,b,\alpha,\beta>0$

◆ تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم جدید ◆

اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$، مفروض باشد و بخواهیم معادله‌ی درجه‌ی دومی بیابیم که ریشه‌هایش با ریشه‌های معادله‌ی اول رابطه‌ی معینی داشته باشد، به دو روش زیر می‌توانیم عمل کنیم:

روش اول: ریشه‌ی معادله‌ی قدیم را x و ریشه‌ی معادله‌ی جدید را y فرض می‌کنیم، رابطه‌ی بین x و y را می‌نویسیم، x را برحسب y می‌یابیم و در معادله‌ی اول جاگذاری می‌کنیم و سپس با عملیات جبری معادله را می‌یابیم.

■ مثال: معادله‌ی درجه دومی تشکیل دهید که، ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3x+1=0$ باشد.

◀ حل: با توجه به خواسته‌ی مسأله $y=x^2$، پس $x=\pm\sqrt{y}$، با قرار دادن به جای x در معادله بر حسب y، خواهیم داشت:

$(\pm\sqrt{y})^2-3(\pm\sqrt{y})+1=0\Rightarrow y+1=\pm 3\sqrt{y}\xrightarrow{\text{توان ۲}}(y+1)^2=9y\Rightarrow y^2+2y+1=9y\Rightarrow y^2-7y+1=0$ (معادله‌ی مطلوب)

روش دوم: S و P معادله‌ی جدید را نوشته و معادله را با استفاده از $x^2-Sx+P=0$ می‌یابیم.

در مثال بالا، اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3x+1=0$ باشند، آنگاه α^2 و β^2 ریشه‌های معادله‌ی جدید هستند، پس:

$$\left.\begin{aligned}S&=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2(1)=7\\P&=\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(1)^2=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow x^2-7x+1=0$$ (معادله‌ی مطلوب)

◆ تعداد و علامت ریشه‌های معادله ◆

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$، با توجه به شرایط Δ، $-\frac{b}{a}$ (مجموع ریشه‌ها) و $\frac{c}{a}$ (حاصلضرب ریشه‌ها) در مورد تعداد و علامت ریشه‌ها، می‌توانیم نظر دهیم.

(۱) $\Delta>0\rightarrow$ معادله دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز دارد $\rightarrow$
- $\frac{c}{a}>0$: دو ریشه‌ی متحدالعلامه دارد. $\rightarrow$
  - دو ریشه‌ی مثبت: $\frac{-b}{a}>0$
  - دو ریشه‌ی منفی: $\frac{-b}{a}<0$
- $\frac{c}{a}<0$: دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه دارد.

(۲) $\Delta=0\rightarrow$ معادله ریشه‌ی مضاعف دارد $\rightarrow x'=x''=\frac{-b}{2a}$ (معادله به یک مربع کامل تبدیل می‌شود)

(۳) $\Delta<0\rightarrow$ معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد

■ **مثال:** بدون حل معادله، در تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 7x + 1 = 0$ نظر دهید.

◀ **حل:** با توجه به $\Delta = (-7)^2 - 4(2)(1)$، از آن‌جایی که $\Delta > 0$ است، پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد، از طرفی $\frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0$، بنابراین معادله دو ریشه‌ی متحدالعلامه خواهد داشت، از طرفی $\frac{-b}{a} = \frac{7}{2} > 0$، لذا هر دو ریشه‌ی معادله مثبت‌اند.

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

محاسبه مقادیر با استفاده از S و P | تیپ ۱۲ | حسابان: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷

۳۱- به ازای کدام مقدار m، عدد $\sqrt{2}$ واسطه‌ی هندسی بین ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$ است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۴)

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) -۳

۳۲- به ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$، برابر ۶ می‌باشد؟ (سراسری تجربی – ۹۳)

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) ۱ ۳) ۱ و $-\frac{9}{5}$ ۴) $\frac{9}{5}$ و ۱-

۳۳- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چقدر است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۵)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۳۴- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x(5x+3) = 2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله‌ی $4x^2 - kx + 25 = 0$ به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\right\}$ است؟ (سراسری ریاضی – ۹۰)

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۱

۳۵- در معادله‌ی $3x^2 - 17x + m = 0$ یک ریشه از سه برابر ریشه‌ی دیگر ۳ واحد بیشتر است. m کدام است؟ (سراسری ریاضی – ۸۷)

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۳۶- در معادله‌ی $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیشتراست. m کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۹۱)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۳۷- در معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 + ax + 9 = 0$، یک ریشه دو برابر ریشه‌ی دیگر است، مجموع دو ریشه‌ی مثبت کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵ (سراسری تجربی خارج از کشور – ۸۴)

تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم جدید | تیپ ۱۳ | حسابان: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷

۳۸- اگر هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + ax + b = 0$، دو برابر معکوس هر ریشه از معادله‌ی $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد، a کدام است؟ (سراسری تجربی – ۸۶)

۱) ۱۴- ۲) ۱۲- ۳) ۸- ۴) ۶-

۳۹- ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + ax + b = 0$، یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیش‌تر است. b کدام است؟ (سراسری تجربی – ۸۷)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۴۰- ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + ax + b = 0$، از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 - 4x - 1 = 0$ یک واحد بیشتر است، b کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – ۸۶)

۱) ۵- ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۴۱- ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$، یک واحد کمتر است؟ (سراسری تجربی – ۹۴)

۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$ ۲) $x^2 + 3x + 1 = 0$ ۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$ ۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$

۴۲- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x = 1$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله‌ی $8x^2 + kx - 1 = 0$ به صورت $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۹۰)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

۴۳- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x-4=0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به‌صورت $\left\{\frac{1}{\alpha}+1,\frac{1}{\beta}+1\right\}$ است؟

(حسابان– صفحه‌ی ۲۳– مشابه تمرین ۶) و (سراسری ریاضی – ۹۲)

۱) $4x^2-5x+1=0$ ۲) $4x^2-3x+1=0$ ۳) $4x^2-5x-1=0$ ۴) $4x^2-3x-1=0$

تعداد و علامت ریشه‌ها | تیپ ۱۴ | حسابان: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷

۴۴- به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2+3x+m^2=2$، معکوس یکدیگرند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – ۹۰)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

آزمون‌های کانون و سایر منابع

۴۵- در ضرب دو عدد طبیعی که یکی از دیگری ۱۰ واحد بزرگتر است؛ اشتباهی رخ می‌دهد. در نتیجه رقم دهگان ۴ واحد کوچکتر می‌شود. برای آزمایش، حاصلضرب را بر عدد کوچکتر تقسیم می‌کنند. خارج قسمت ۳۹ و باقیمانده‌ی آن ۲۲ می‌شود. مجموع این دو عدد کدام است؟

(حسابان– صفحه‌ی ۲۳– مسأله‌ی ۱۰)

۱) ۶۲ ۲) ۲۹ ۳) ۳۱ ۴) ۷۲

۴۶- مردی در نیمه‌ی اول قرن نوزدهم متولد شد (بین سال‌های ۱۸۰۰ تا ۱۸۵۰)، وقتی او x سال داشت، سال x^2 بود. او در چه سالی متولد شده است؟

(حسابان– صفحه‌ی ۲۳– مشابه مسأله‌ی ۸)

۱) ۱۸۲۰ ۲) ۱۸۱۰ ۳) ۱۸۰۶ ۴) ۱۸۰۹

۴۷- اگر معادله‌ی $x^2-2x\cos\alpha+1=0$ ریشه‌ی حقیقی و مثبت داشته باشد، حاصل $x'\cos^2\alpha$ کدام است؟ (x' ریشه‌ی معادله است.)

(آزمون کانون ریاضی– ۸۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۳

۴۸- اگر $b>a>0$ و $x_1<x_2$ ریشه‌های معادله‌ی $x^2-(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})x+1=0$ باشند حاصل bx_1+ax_2 کدام است؟ (حسابان– فصل ۱– صفحه‌های ۱۶ تا ۲۳)

۱) ab ۲) $a+b$ ۳) a^2b^2 ۴) a^2+b^2

۴۹- اگر a و b ریشه‌های معادله‌ی $x^2-mx+2=0$ و $a+\frac{1}{b}$ و $b+\frac{1}{a}$ ریشه‌های معادله‌ی $x^2-px+q=0$ باشند، آنگاه q برابر است با:

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{9}{2}$ (حسابان– فصل ۱– صفحه‌های ۱۶ تا ۲۳)

۵۰- هرگاه a و b عددهای اول و معادله‌ی $x^2-ax+b=0$ دارای ریشه‌های صحیح و مثبت متمایز باشد، مجموع ریشه‌ها کدام است؟

(حسابان– فصل ۱– صفحه‌های ۱۶ تا ۲۳)

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۶

۵۱- در معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2-(m+1)x-8=0$، اگر یکی از جواب‌ها نصف مربع جواب دیگر باشد، m کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی– ۹۱)

۱) ۲ ۲) -۴ ۳) -۱ ۴) -۲

۵۲- اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی درجه‌ی دومی با ضرایب گویا، $\sqrt{3}+1$ باشد، مجموع مکعبات دو ریشه‌ی این معادله کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی– ۹۱)

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۲۰ ۴) -۲۰

۵۳- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x+1=0$ و $\alpha>\beta$، آنگاه معادله‌ای که ریشه‌هایش 5α و 4β باشد کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی– ۸۷)

۱) $x^2-15x+9=0$ ۲) $x^2+7x+1=0$ ۳) $x^2-7x+10=0$ ۴) $x^2+15x+9=0$

۵۴- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $4x^2-2x-1=0$ باشد، به ازای کدام مقدار m مجموعه جواب‌های معادله‌ی $4x^2-6x+m=0$ به صورت $\beta+2\alpha$ و $\alpha+2\beta$ است؟ (آزمون کانون ریاضی– ۷ فروردین ۹۴)

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۵۵- اگر a و c دو عدد گویای مخالف صفر و مبین معادله‌ی $ax^2-2\sqrt{2}x+c=0$ صفر باشد، آن‌گاه ریشه‌های معادله: (آزمون کانون ریاضی– ۸۸)

۱) گویا هستند. ۲) گنگ هستند. ۳) صحیح هستند. ۴) طبیعی هستند.

۳. عبارات درجه‌ی دوم

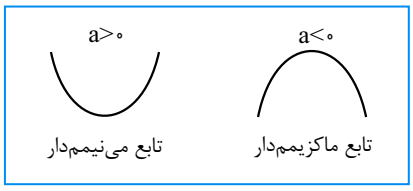
- تابع درجه‌ی دوم
- تعیین علامت و حل نامعادله‌ی درجه‌ی دوم

◆ تابع درجه‌ی دوم ◆

۱ **ماکزیمم (می‌نیمم) تابع درجه‌ی دوم:** هر تابع به شکل $y = ax^۲ + bx + c$ (با شرط $a \neq ۰$)، یک تابع درجه‌ی دوم یا سهمی قائم نامیده می‌شود، با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای خواهیم داشت:

$$f(x) = a(x^۲ + \frac{b}{a}x) + c \Rightarrow f(x) = a\left((x + \frac{b}{۲a})^۲ - \frac{b^۲}{۴a^۲}\right) + c \Rightarrow f(x) = a\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ + \frac{۴ac - b^۲}{۴a}$$

از آنجایی که همواره $\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ \geq ۰$، اگر $a > ۰$ باشد، آن‌گاه $f(x) \geq \frac{۴ac - b^۲}{۴a}$ یعنی برد تابع $\left[-\frac{\Delta}{۴a}, +\infty\right)$ و تابع دارای می‌نیمم و مقدار آن $\frac{۴ac - b^۲}{۴a}$ است و اگر $a < ۰$ باشد، آن‌گاه $f(x) \leq \frac{۴ac - b^۲}{۴a}$ یعنی برد تابع بازه‌ی $\left(-\infty, -\frac{\Delta}{۴a}\right]$ و تابع دارای ماکزیمم و مقدار آن $\frac{۴ac - b^۲}{۴a}$ است. خط $y = \frac{۴ac - b^۲}{۴a}$، همواره بر منحنی مماس است. وقتی $a > ۰$، تابع خنثی شونده به نواحی اول و دوم و وقتی $a < ۰$، تابع خنثی شونده به نواحی سوم و چهارم است.



➢ **نتیجه‌ی (۱):** اگر ضابطه‌ی تابع به‌شکل $f(x) = ax^۲ + bx + c$ باشد، مختصات نقطه‌ی ماکزیمم (می‌نیمم) $S\left(\frac{-b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a}\right)$ است.

➢ **نتیجه‌ی (۲):** اگر ضابطه‌ی تابع به‌شکل $f(x) = a(x-h)^۲ + k$ باشد، مختصات نقطه‌ی ماکزیمم (می‌نیمم) $S(h, k)$ است.

➢ **نتیجه‌ی (۳):** اگر ضابطه‌ی تابع به‌شکل $f(x) = a(x-x_۱)(x-x_۲)$ باشد، مختصات نقطه‌ی ماکزیمم (می‌نیمم) $S\left(\frac{x_۱ + x_۲}{۲}, f(\frac{x_۱ + x_۲}{۲})\right)$ است.

۲ **محورتقارن تابع درجه‌ی دوم:** خط به معادله‌ی $x = \frac{-b}{۲a}$، محور تقارن تابع است.

■ **مثال:** نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = -mx^۲ + (m^۲ - ۶)x + ۱$ در نقطه به طول $-\frac{۱}{۲}$ دارای ماکزیمم است، بیشترین مقدار تابع را بیابید.

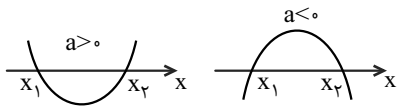
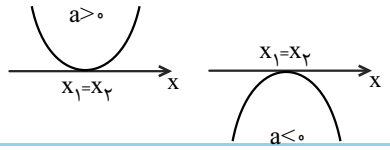
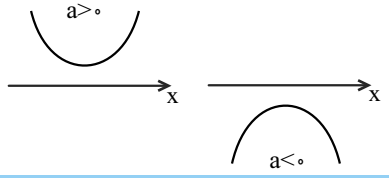
◀ **حل:** طول نقطه‌ی ماکزیمم $-\frac{۱}{۲}$ است، پس:

$$x = \frac{-b}{۲a} = -\frac{m^۲ - ۶}{-۲m} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow m = ۶ - m^۲ \Rightarrow m^۲ + m - ۶ = ۰ \Rightarrow m = -۳ \ , \ m = ۲$$

با توجه به ماکزیمم‌دار بودن تابع، باید ضریب $x^۲$ منفی باشد، بنابراین $-m < ۰$ و از آن‌جا $m > ۰$. با توجه به دو مقدار به‌دست آمده برای m، فقط $m = ۲$ قابل قبول است، حال ماکزیمم تابع با ضابطه‌ی $y = -۲x^۲ - ۲x + ۱$ را می‌یابیم:

$$y_{max} = -\frac{\Delta}{۴a} = -\frac{۴ - (-۸)}{۴(-۲)} = \frac{۳}{۲}$$

۳ **نمودار تابع درجه‌ی دوم:** نمودار تابع درجه‌ی دوم با ضابطه‌ی $f(x) = ax^۲ + bx + c$، با توجه به علامت‌های Δ ی معادله و ضریب $x^۲$ به شکل‌های زیر است.

وضعیت Δ	نمودار	تعیین علامت
(۱) $\Delta > ۰$		با توجه به نمودار، بین دو ریشه، علامت تابع همواره مخالف علامت a و خارج فاصله‌ی بین دو ریشه، همواره موافق علامت a است.
(۲) $\Delta = ۰$		با توجه به نمودار، همواره علامت تابع موافق علامت a است. **توجه:** اگر $a > ۰$ ($a < ۰$) باشد، آن‌گاه تابع همواره بالای (پایین) محور xها یا بر آن مماس است.
(۳) $\Delta < ۰$		با توجه به نمودار، همواره علامت تابع موافق علامت a است. **توجه:** اگر $a > ۰$ ($a < ۰$) باشد، آن‌گاه تابع همواره بالای (پایین) محور xهاست.

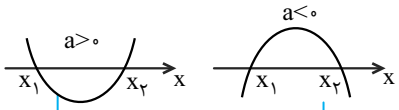
■ **مثال:** به ازای چه حدودی از a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ax^۲+۲x+a$، همواره بالای محور x هاست؟

◀ **حل:** باید $a>۰$ و $\Delta<۰$ باشد، پس:

$$\begin{cases} a>۰ \\ \Delta=۲^۲-۴a\times a<۰ \Rightarrow a^۲>۱ \Rightarrow a>۱ \cup a<-۱ \end{cases} \xrightarrow{a>۰} a>۱$$

◆ تعیین علامت و حل نامعادله‌ی درجه دوم ◆

الف- تعیین علامت $P=a(x-x_۱)(x-x_۲)$ $(x_۱<x_۲)$



یا $P=ax^۲+bx+c$ با شرط $\Delta>۰$:

۱- با توجه به نمودار، اگر $a\times P<۰$ باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی جواب، فاصله‌ی بین دو ریشه است.

۲- با توجه به نمودار، اگر $a\times P>۰$ باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی جواب، خارج فاصله‌ی بین دو ریشه است.

با توجه به نمودار، بین دو ریشه، مخالف علامت a و خارج فاصله‌ی آن‌ها، موافق علامت a است.

ب- اگر $\Delta=۰$ باشد، عبارت دارای ریشه‌ی مضاعف است و علامت آن (غیر از در نقطه‌ی ریشه) همواره با علامت a یکسان خواهد بود.

ج- اگر $\Delta<۰$، عبارت فاقد ریشه است و علامت آن همواره موافق علامت a است، در این حالت اگر $a>۰$، عبارت همواره مثبت و اگر $a<۰$ عبارت همواره منفی است.

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

ماکزیمم (می‌نیمم) تابع درجه‌ی دوم | تیپ ۱۵ | حسابان: صفحه‌های ۱۸ و ۱۹

۵۶- منحنی توابع با ضابطه‌ی $f(x)=-x^۲+bx+۳$ بر خط به معادله‌ی $y=۷$ مماس‌اند. فاصله‌ی دو نقطه‌ی تماس کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – ۸۵)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

وضعیت نمودار با محور x ها | تیپ ۱۶ | حسابان: صفحه‌های ۱۸ و ۱۹

۵۷- اگر منحنی به معادله‌ی $y=۲x^۲-۴x+m-۳$، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی – ۸۷)

۱) $m>۳$ ۲) $۳<m<۴$ ۳) $۳<m<۵$ ۴) $۴<m<۵$

۵۸- به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x)=ax^۲+(a+۳)x-۱$، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟ (سراسری ریاضی خارج کشور – ۹۲)

۱) $a<-۹$ ۲) $a<-۳$ ۳) $a>-۱$ ۴) $-۳<a<۰$

۵۹- به ازای کدام مجموعه مقادیر m، منحنی به معادله‌ی $y=(m-۲)x^۲-۲(m+۱)x+۱۲$، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی، قطع می‌کند؟ (سراسری ریاضی– ۹۵)

۱) $m>۲$ ۲) $-۱<m<۲$ ۳) هر مقدار m ۴) هیچ مقدار m

۶۰- به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر m، منحنی به معادله‌ی $y=(m+۲)x^۲+۳x+۱-m$، محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۹۵)

۱) $m>۱$ یا $m<-۲$ ۲) $-۲<m<۱$ ۳) فقط $m<-۲$ ۴) فقط $m>۱$

۶۱- به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=(m-۱)x^۲+\sqrt{۳}x+m$ همواره در زیر محور x هاست؟ (سراسری ریاضی – ۸۵)

۱) $m<-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}<m<۱$ ۳) $۱<m<\frac{۳}{۲}$ ۴) $m>\frac{۳}{۲}$

۶۲- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، هر نقطه از نمودار تابع $f(x)=(a-۱)x^۲+۲\sqrt{۲}x+a$ بالای محور x هاست؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۹)

۱) $a<-۱$ ۲) $a>۱$ ۳) $a>۲$ ۴) $۱<a<۲$

۶۳- به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y=۲x^۲+(m+۱)x+m+۶$، بر نیمساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات، مماس است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – ۹۳)

۱) -۴ ۲) ۴ و -۱۲ ۳) -۴ و ۱۲ ۴) ۱۲

نمودار تابع درجه دوم | تیپ ۱۷ | حسابان: صفحه‌های ۱۸ و ۱۹

۶۴- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=x^۲-۳x-۱۰$ را حداقل چند واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور xها غیرمنفی باشد؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – ۹۳)

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۵- به ازای کدام مقادیر a، منحنی به معادله‌ی $y = ax^2 - (a+2)x$ از ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (سراسری ریاضی – ۸۹)

۱) $a \le 2$ ۲) $a > -2$ ۳) $a > 0$ ۴) $-2 \le a < 0$

۶۶- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$، از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (سراسری ریاضی – ۹۲)

۱) $a \le 2$ ۲) $0 < a \le 2$ ۳) $2 < a < 3$ ۴) $0 < a < 3$

تعیین علامت عبارت درجه‌ی دوم | تیپ ۱۸ | ریاضیات۲: صفحه‌های ۷۶ تا ۸۴

۶۷- به ازای کدام مقادیر m، عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1$، برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟ (ریاضیات ۲– صفحه‌ی ۸۴– مشابه مسأله‌ی ۶) و (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۹۰)

۱) $m < -2$ ۲) $m > 2/5$ ۳) $1 < m < 2$ ۴) $1 < m < 2/5$

۶۸- اگر عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟ (ریاضیات ۲– صفحه‌ی ۸۴– مشابه مسأله‌ی ۷) و (سراسری ریاضی – ۹۱)

۱) $\{a : 1 < a < 5\}$ ۲) $\{a : a < 1\}$ ۳) ϕ ۴) R

۶۹- مقادیر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$، در بازه‌ی (a,b) بزرگتر از $\frac{7}{2}$ است. بیشترین مقدار $b-a$، کدام است؟ (سراسری تجربی– ۸۹)

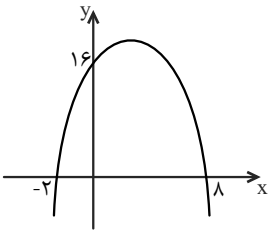
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۵/۵ ۴) ۶

آزمون‌های کانون و سایر منابع

۷۰- کمترین مقدار تابع $f(x) = x + \frac{2}{x}$ به ازای مقادیر مثبت x کدام است؟ (حسابان– صفحه‌ی ۲۴– مسأله‌ی ۱۲)

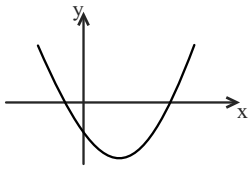
۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$

۷۱- اگر نمودار تابع درجه‌ی دومی به‌صورت مقابل باشد، مجموع ضرایب این تابع کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی– ۹۱)



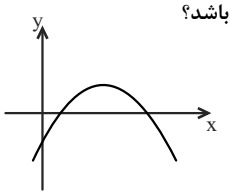
۱) ۱۹
۲) ۲۰
۳) ۲۱
۴) ۲۲

۷۲- در شکل زیر سهمی به معادله‌ی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. کدام گزینه صحیح است؟ (حسابان– صفحه‌ی ۱۹– مسأله‌ی ۲–ب)



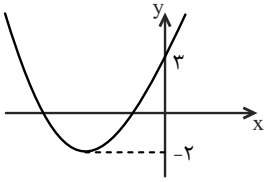
۱) $b - c > 0$
۲) $b + c > 0$
۳) $abc < 0$
۴) $abc > 0$

۷۳- نمودار تابع $f(x) = mx^2 + 8x - 2$ به شکل مقابل است. m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟ (آزمون کانون ریاضی– ۱۰ بهمن ۹۳)



۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

۷۴- در تابع درجه دوم $P(x) = \frac{5}{4}x^2 + bx + c$ که مربوط به شکل زیر است مقدار $\frac{c}{b}$ کدام است؟ (حسابان– صفحه‌ی ۲۴– مسأله‌ی ۱۳–ب)



۱) $-0/8$
۲) $0/8$
۳) $0/6$
۴) $-0/6$

۷۵- به ازای کدام مقدار یا مقادیر m، تابع می‌نیمم‌دار $y = mx^2 + (3-m)x + 1$ در نقطه‌ای به طول مثبت بر محور xها مماس است؟ (آزمون کانون ریاضی– ۸۸)

۱) ۸ ۲) ۱ و ۹ ۳) فقط (۹) ۴) فقط (۱)

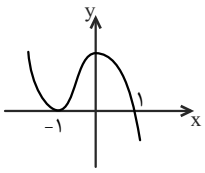
۷۶- تابع با ضابطه‌ی $y = ax^2 - 2ax + a + 1$ بر خط ثابتی مماس است. معادله‌ی این خط کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی– ۸۹)

۱) $y = 0$ ۲) $x = 1$ ۳) $y = 1$ ۴) $y = x + 1$

۴. معادلات و نامعادلات چندجمله‌ای

۵. معادلات و نامعادلات گویا

◆ معادلات چندجمله‌ای ◆



صفرهای تابع: در تابع $y=f(x)$ جواب‌های معادله‌ی $f(x)=0$ را (در صورت وجود)، صفرهای تابع f می‌نامیم، صفرهای تابع f آن مقادیری از x هستند که به ازای آن‌ها $f(x)$، صفر می‌شود، در واقع صفرهای تابع f، محل تلاقی منحنی تابع با محور xهاست. در این حالت ریشه‌ی ساده‌ی معادله‌ی $f(x)=0$، محل تقاطع تابع f با محور xهاست همچنین ریشه‌ی مکرر از مرتبه‌ی زوج یا فرد معادله‌ی $f(x)=0$، محل تماس تابع f با محور xهاست، در صورتی که نمودار محور xها را قطع نکند، معادله‌ی $f(x)=0$، فاقد ریشه خواهد بود.

به عنوان مثال اگر نمودار تابع $y=f(x)$، شکل بالا باشد، آنگاه معادله‌ی $f(x)=0$، دارای ریشه‌ی ساده‌ی ۱ و ریشه‌ی مضاعف (تکراری) -1 خواهد بود.

■ **مثال:** در معادله‌ی $(x-4)^4(x-3)^2(x-2)^3(x-1)=0$، $x=1$ ریشه‌ی ساده، $x=3$ و $x=4$ ریشه‌های مکرر مرتبه‌ی زوج و $x=2$ ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی فرد هستند. توجه کنید که $x=3$ را ریشه‌ی مضاعف نیز می‌نامیم.

۱ حل معادلات چندجمله‌ای: برای حل یک معادله‌ی چندجمله‌ای، با دسته‌بندی مناسب و فاکتورگیری، استفاده از اتحادها یا تجزیه، عبارت را به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تبدیل کرده و سپس هر کدام از عامل‌ها را برابر صفر قرار داده و ریشه‌ها را می‌یابیم.

■ **مثال:** معادله‌ی $x^3-x^2-x+1=0$ را حل کنید.

◀ **حل:**
$$x^2(x-1)-(x-1)=0\Rightarrow(x^2-1)(x-1)=0\Rightarrow(x+1)(x-1)^2=0\Rightarrow x=1,x=-1$$

۲ معادلات دومجذوری: در بعضی از معادلات با در نظر گرفتن یک متغیر جدید، می‌توان معادله را به یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل کرد و آن را حل و بحث نمود. به این‌گونه معادلات، معادله‌ی دومجذوری می‌گوئیم.

■ **مثال:** تعداد جواب‌های معادله‌ی $x^4-4x^2-7=0$ را بیابید.

◀ **حل:** با انتخاب $x^2=t\geq 0$، به معادله‌ی $t^2-4t-7=0$ خواهیم رسید، در این معادله $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}=\frac{-7}{1}<0$، پس معادله برحسب t، یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی دارد، از آن‌جایی که $x^2=t\geq 0$، پس دو جواب قرینه برای معادله به‌دست می‌آید.

◆ نامعادلات چندجمله‌ای ◆

برای حل یک نامعادله‌ی چندجمله‌ای، ابتدا همه‌ی متغیرها را به یک طرف منتقل کرده و عبارت را به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تبدیل می‌کنیم (در صورت نیاز از فاکتورگیری یا تجزیه استفاده می‌کنیم)، ریشه‌های هر عامل را می‌یابیم و در یک جدول سطری به ترتیب صعودی قرار می‌دهیم، در دو طرف ریشه‌های ساده (به عنوان مثال $x-2$) و مکرر مرتبه‌ی فرد (به عنوان مثال $(x-2)^3$) تغییر علامت خواهیم داشت و در دو طرف ریشه‌های مکرر مرتبه‌ی زوج (به عنوان مثال $(x-2)^4$ یا $(x-2)^2$) تغییر علامت نخواهیم داشت، همچنین عبارات همواره مثبت در تعیین علامت بی‌اثرند (به عنوان مثال x^4+1). باید علامت یکی از بازه‌ها را معلوم کنیم، از آخرین بازه‌ی جدول، یک عدد امتحانی انتخاب کرده و علامت عبارت را در آن بازه تعیین کرده، سپس علامت‌ها را در هریک از بازه‌ها مشخص می‌کنیم.

■ **مثال:** نامعادله‌ی $(1-x)(x-3)^6(x-7)^9<0$ را حل کنید.

◀ **حل:** ریشه‌ها ۱، ۳ و ۷ هستند که در $x=3$ تغییر علامت نداریم. در آخرین بازه با انتخاب عدد ۸، مقدار عبارت منفی است، پس جدول تعیین علامت به‌صورت زیر است.

x	$-\infty$		۱		۳		۷		$+\infty$
P(x)		−	۰	+	۰	+	۰	−	

بنابراین مجموعه‌ی جواب $(-\infty,1)\cup(7,+\infty)$ خواهد بود.

◆ معادلات گویا ◆

معادله‌هایی که از عبارت‌ها گویا ساخته شده باشند، معادله‌های گویا می‌نامیم، برای حل این‌گونه معادلات، ابتدا دامنه‌ی تعریف متغیر را می‌یابیم، سپس بین کسرهای داده شده مخرج مشترک می‌گیریم (معمولاً ک.م.م مخرج‌ها انتخاب می‌شود) و در انتها، عبارت جبری به‌دست آمده را حل کرده و جواب‌های به‌دست آمده را در صورتی‌که مخرج کسرهای معادله‌ی اولیه را صفر نکنند، به عنوان جواب معادله انتخاب می‌کنیم.

■ **مثال:** معادله‌ی $\frac{3}{x}+\frac{5}{x+2}=2$ را حل کنید.

◀ **حل:** ک.م.م، مخرج‌ها $x(x+2)$ است، با ضرب طرفین در ک.م.م خواهیم داشت:

$$3(x+2)+5x=2x(x+2)\Rightarrow 8x+6=2x^2+4x\Rightarrow 2x^2-4x-6=0\Rightarrow x^2-2x-3=0$$
$$\Rightarrow (x-3)(x+1)=0\Rightarrow x=3 \quad \text{یا} \quad x=-1$$

که هر دو جواب قابل قبول هستند.